

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ЭНЕРГОСИСТЕМ

ТРУДЫ ИГЭУ

Выпуск VIII

Под редакцией

*доктора технических наук, профессора В.А. Шуина,
доктора технических наук, профессора М.Ш. Мисриханова,
доктора технических наук, профессора А.В. Мошкарина*

ИВАНОВО
2007

УДК 621.311

ББК 31.37

П 42

Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. Вып. VIII / Под ред. В.А. Шуина, М.Ш. Мисриханова, А.В. Мошкарин. – Иваново, 2007. – 500 с.

ISBN 978-5-89482-486-4

Редакционная коллегия:

д-р техн. наук, проф. В.Н. Нуждин, д-р техн. наук, проф. М.Ш. Мисриханов,
д-р техн. наук, проф. Б.М. Ларин, д-р техн. наук, проф. А.В. Мошкарин,
д-р техн. наук, проф. В.А. Савельев, д-р техн. наук, проф. В.А. Строев,
д-р техн. наук, проф. С.В. Тарарыкин, д-р техн. наук, проф. В.А. Шуин,
д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов, д-р техн. наук, проф. И.В. Якимец

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. В.А. Семенов (СО-ЦДУ ЕЭС России);
д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов (Информационно-вычислительный
центр Мосэнерго);
д-р техн. наук, проф. Ю.А. Митькин (ГОУВПО «Ивановский
государственный энергетический университет им. В.И. Ленина»)

В предлагаемой читателю книге представлены статьи, являющиеся результатами разработок, теоретических и экспериментальных исследований в области теплоэнергетики, электроэнергетики, компьютерных технологий, выполненных сотрудниками Ивановского государственного энергетического университета, МЭС Центра ОАО «ФСК ЕЭС», а также других вузов, научно-исследовательских, проектных и эксплуатационных организаций, сотрудничающих с ИГЭУ и МЭС Центра.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся исследованием, разработкой, проектированием и эксплуатацией энергетических систем, электрических станций и сетей, комплексов и устройств их автоматического управления.

ISBN 978-5-89482-486-4

© Авторы, 2007

УДК 621.319.7.001.2

Численное моделирование плоских электромагнитных волн в ферромагнетике

С.Н. Кадников, д-р техн. наук, М.Н. Горячев

При расчетах электромагнитного поля в нелинейной ферромагнитной среде до сих пор применяются различные эмпирические методики, основанные на приближенных формулах и натурном эксперименте. В частности, ввиду своей простоты популярностью пользуется методика, предложенная Л.Р. Нейманом [1]. Она основана на замене сложных временных зависимостей индукции и напряженности магнитного поля первыми гармониками и введении вместо нелинейной зависимости магнитной проницаемости от H функции пространственной координаты. Методика Л.Р. Неймана используется, например, при расчете процессов индукционного нагрева [2], при расчете потерь на вихревые токи в трансформаторной стали и в других областях. Однако вопрос о точности такой методики остается открытым, поскольку натурный эксперимент может дать оценку только интегральных параметров. Между тем при проектировании, например, установок для индукционного нагрева и в особенности индукторов для индукционной закалки необходимо достоверно знать распределение магнитного поля внутри стальных деталей с учетом нелинейности кривой намагниченности и вихревых токов. Эту проблему можно успешно решать только с применением численных методов математического моделирования. Для электродинамических нелинейных задач единственным продуктивным подходом является применение метода сеток или конечных элементов. Такой подход применительно к процессам индукционного нагрева рассматривается в [3]. Методика, предложенная в этой работе, предусматривает кусочно-постоянную аппроксимацию проницаемости ферромагнитной среды, что может привести к значительным погрешностям, в особенности при глубоком насыщении ферромагнитной стали и резкой неоднородности распределения поля.

Поэтому представляется актуальной разработка методов прямого численного моделирования электромагнитного поля в нелинейной ферромагнитной среде. Это позволит детально исследовать характер электромагнитных явлений, происходящих в нелинейной среде, и создать базу для оценки точности различных приближенных методик.

Рассмотрим характерную одномерную задачу, когда на поверхности плоской стальной стенки, толщина которой значительно больше глубины проникновения, задано переменное магнитное поле с напряженностью

$$H_0 = H_{0m} \cdot \sin(\omega \cdot t) .$$

Частота изменяется от 1000 до 8000 Гц, а амплитуда напряженности H_{0m} должна варьироваться от 1000 до 70000 А/м.

В линейном варианте ($\mu = \text{const}$) действующее значение напряженности электрического и магнитного полей выражается формулами

$$H_y = H_0 \cdot e^{-k \cdot z} , \quad (1)$$

$$E_x = z_b \cdot H_0 \cdot e^{-k \cdot z} , \quad (2)$$

где z – расстояние от поверхности стенки; b – глубина проникновения.

$$z_b = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu}{\gamma}} , \quad k = \frac{1}{b} .$$

Для нелинейной задачи используется то же граничное условие. Магнитная характеристика нелинейного ферромагнетика (конструкционной стали) задавалась в форме

$$B_y = k_1 \cdot \arctg(k_2 \cdot H_y) ,$$

где k_1, k_2 – постоянные коэффициенты: $k_1 = 1,28$ Тл, $k_2 = 9,8 \cdot 10^{-4}$ (А/м)⁻¹. Такая зависимость позволяет аппроксимировать кривые намагничивания для различных сортов сталей, особенно при сильных полях. С использованием данной зависимости можно получить следующее нелинейное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1 + k_2^2 H_y^2}{\gamma \cdot k_1 \cdot k_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} . \quad (3)$$

Данное уравнение решалось методом сеток. Испытывались различные способы аппроксимации и методы решения полученных нелинейных уравнений. Вначале была рассмотрена явная схема на пятиточечном шаблоне, как наиболее простая:

$$\frac{H_{yi}^{n+1} - H_{yi}^n}{\Delta t} = a \frac{H_{y(i+1)}^n - 2H_{yi}^n + H_{y(i-1)}^n}{\Delta z^2}, \quad (4)$$

где

$$a = \frac{1 + (k_2 H_{yi}^n)^2}{\gamma \cdot k_1 \cdot k_2}.$$

Такая схема имеет первый порядок точности по времени (относительно Δt) и второй относительно пространственной координаты. Численные эксперименты показали, что данная схема предъявляет жесткие требования к величине шага по времени, который должен подчиняться условию

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\Delta z^2}{a}.$$

Поскольку коэффициент a пропорционален квадрату напряженности поля, то с ее увеличением шаг Δt должен быстро уменьшаться. При этом число шагов по времени на периоде колебания также быстро растет и при $H_{0m} > 10^4$ А/м может достигать сотен тысяч. Это приводит к неоправданно высоким затратам машинного времени и заставляет отказаться от явных схем.

Далее была проверена неявная схема первого порядка точности по времени вида

$$\frac{H_{yi}^{n+1} - H_{yi}^n}{\Delta t} = a \frac{H_{y(i+1)}^{n+1} - 2H_{yi}^{n+1} + H_{y(i-1)}^{n+1}}{\Delta z^2}. \quad (5)$$

Данная схема имеет первый порядок точности по времени и второй по пространству. В отличие от схемы (4) она абсолютно устойчива и позволяет существенно увеличить шаг по времени. Однако расчеты показали, что при больших значениях H_0 (глубоком насыщении) точность аппроксимации по времени в данной схеме оказывается недостаточной. На зависимостях $H_y(t)$ появляются осцилляции, характерные для вычислений при недостаточной точности аппроксимации на устойчивой разностной схеме. Шаг по времени приходится уменьшать, причем довольно значительно, и основное преимущество неявной схемы теряется. Если учесть к тому же, что в неявной схеме

на каждом временном шаге необходимо решать систему нелинейных уравнений, можно сделать вывод, что такой подход также несостоятелен.

Анализ показал, что основной причиной возникших проблем является высокая степень жесткости (или плохая обусловленность) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой может быть сведено решение уравнения (3). Она получается при сохранении непрерывной производной по времени и дискретизации дифференциального оператора по z :

$$\frac{dH_{yi}}{dt} = a \frac{H_{y(i+1)} - 2H_{yi} + H_{y(i-1)}}{\Delta z^2} \quad (i = 2, \dots, N-1), \quad (6)$$

где N – полное число шагов по z . Система $N-2$ дифференциальных уравнений (6) заменяет (аппроксимирует) исходное уравнение (3). Жесткость этой системы можно оценить, определяя якобиан правой части и вычисляя для матрицы якобиана при фиксированном распределении H_{yi} собственные числа. Следует отметить, что применение полунявных методов типа Розенброка для решения уравнений в частных производных ранее не рассматривалось, поскольку сильная нелинейность для такого рода уравнений является, вообще говоря, нехарактерной. В тех случаях, когда ее приходилось учитывать, обычно применялись грубые методы кусочно-постоянной аппроксимации, не обеспечивающие адекватного моделирования. Спектральная норма матрицы якобиана может служить оценкой жесткости ν системы (6). Вычисления показали, что на линейном участке при относительно малых H_y , $\nu \approx 2000$, в режиме насыщения $\nu \approx 107$, то есть жесткость системы весьма высока. Для решения подобного рода систем разработаны специальные методы. В данном случае наилучшие результаты показал полунявный метод Розенброка [4]. Он был реализован в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \Delta t \cdot (E - J(\bar{X}^n) \cdot \Delta t \cdot a_1)^{-1} \cdot F(\bar{X}^n); \\ \bar{k}_2 &= \Delta t \cdot (E - J(\bar{X}^n + \bar{k}_1 c_1) \cdot \Delta t \cdot a_1)^{-1} \cdot F(\bar{X}^n + \bar{k}_1 b_1); \\ \bar{X}^{n+1} &= \bar{X}^n + \bar{k}_1 \gamma_1 + \bar{k}_2 \gamma_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где \bar{X}^n – вектор неизвестных H_{yi} на n -м временном слое; $J(\bar{X}^n)$ – якобиан правой части (6); $F(\bar{X}^n)$ – правая часть системы (6); \bar{k}_1 , \bar{k}_2 – вспомогательные векторы; a_1 , a_2 , c_1 , b_1 , γ_1 , γ_2 – постоянные числа.

Данный метод имеет второй порядок точности по времени. Граница устойчивости для него гораздо ниже, чем для простых явных схем. Вы-

числительные эксперименты показали, что вплоть до $H_0 = 10^5$ А/м число шагов по периоду не превосходит 800, это обеспечивает высокую экономичность вычислительных ресурсов.

Результаты расчетов магнитного поля представлены на рис. 1 – 4. Точность результатов составляет не менее 1 %. Она была получена путем сравнения результатов при различных уровнях дискретизации по времени и пространству.

На рис. 1, 2, 3 представлены временные зависимости H_y и B_y при $z = 0$ и $z = b/2$ при различных H_0 . Данные кривые показывают, что время переходного процесса зависит от расстояния от поверхности и амплитуды напряженности на поверхности, то есть от степени искажения кривых, и не превышает одного периода. При этом степень искажения кривых H_y и B_y падает с ростом расстояния от поверхности, что вызывается уменьшением амплитуды напряженности.

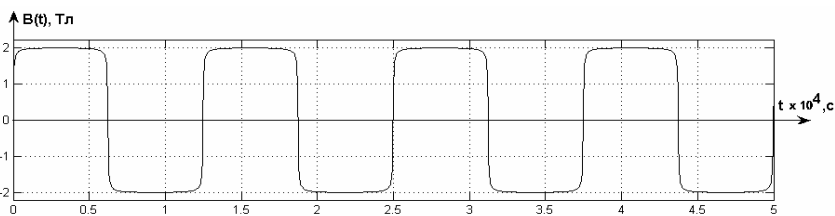


Рис. 1. Зависимость $B(t)$ на поверхности стали ($z = 0$, $H_{0m} = 60000$ А/м)

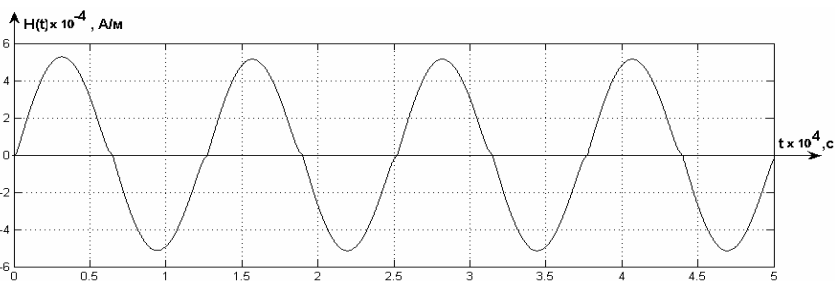


Рис. 2. Зависимость $H(t)$ при $z = b/2$, $H_{0m} = 60000$ А/м

На рис. 5 и 6 представлены кривые зависимости действующих значений H и B соответственно от координаты z , отсчитываемой от поверхности металла. На тех же графиках приведены зависимости действующих значений B и H от z для линейного варианта, построенные по формулам (1), (2). В каче-

стве постоянного μ выбиралось значение проницаемости на линейном участке зависимости $B(H)$, равное $k_1 \cdot k_2 / \mu_0$. Сравнение показывает, что отклонение кривых $H(z)$ для нелинейного варианта зависит от амплитуды напряженности на поверхности при $\mu = \text{const}$ и при $H_{0m} = 71000$ А/м может достигать 45 %. В то же время отклонение кривой $B(z)$ весьма значительно, поскольку при данном значении H_{0m} сталь насыщается.

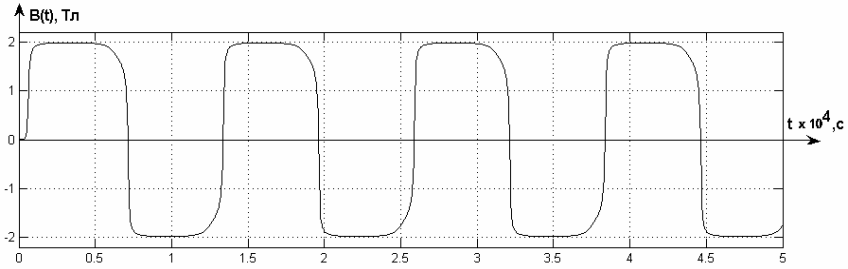


Рис. 3. Зависимость $B(t)$ при $z = 1,5 \cdot b$, $H_{0m} = 60000$ А/м

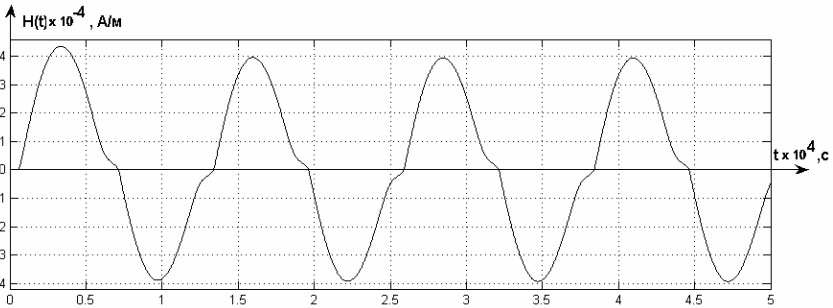


Рис. 4. Зависимость $H(t)$ при $z = 1,5 \cdot b$, $H_{0m} = 60000$ А/м

При этом форма кривых в ферромагнетике заметно отличается от экспоненциальной зависимости. На начальном участке она близка к линейной, что в качественном смысле согласуется с известными результатами [1]. На рис. 7 и 8 приведены кривые $H(z)$ для линейного и нелинейного вариантов при частотах $f = 2000$ Гц, $f = 5000$ Гц, $f = 8000$ Гц. Данные зависимости показывают, что изменение частоты почти не сказывается на искажении кривых за счет нелинейности и при максимальном фиксированном значении напряженности магнитного поля $H_{0m} = 71000$ А/м на поверхности оно по-прежнему составляет величину порядка 45 %.

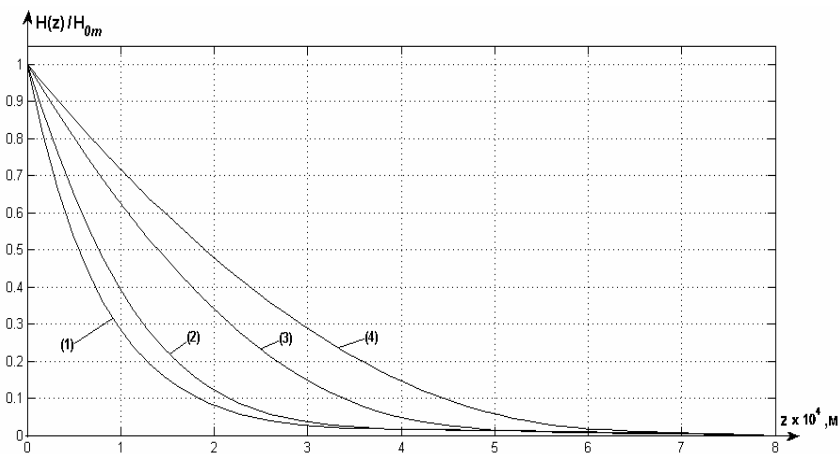


Рис. 5. Нормированные зависимости $H(z)$ в линейном (кривая 1) и нелинейных вариантах при $H_{0m} = 7000 \text{ A/m}$ (2), $H_{0m} = 35000 \text{ A/m}$ (3), $H_{0m} = 71000 \text{ A/m}$ (4)

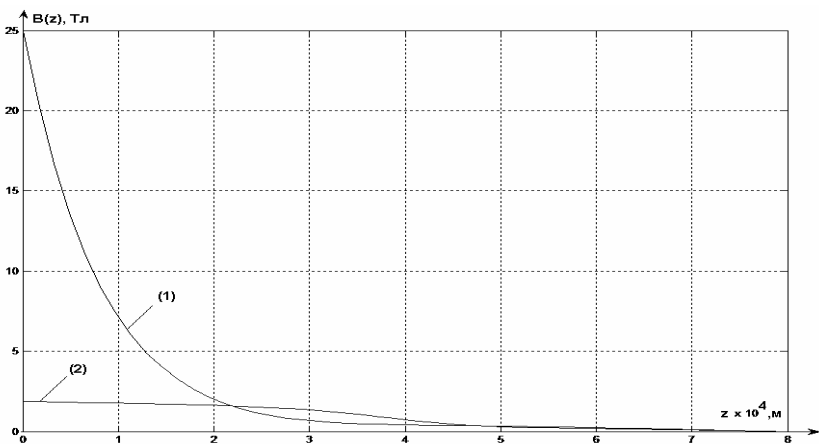


Рис. 6. Зависимости $B(z)$ в линейном (кривая 1) и нелинейном (кривая 2) вариантах

В заключение можно отметить, что, несмотря на относительную внешнюю простоту рассмотренной задачи, полученные результаты имеют достаточно универсальный характер, поскольку электромагнитное поле в стали у ее поверхности всегда близко одномерному.

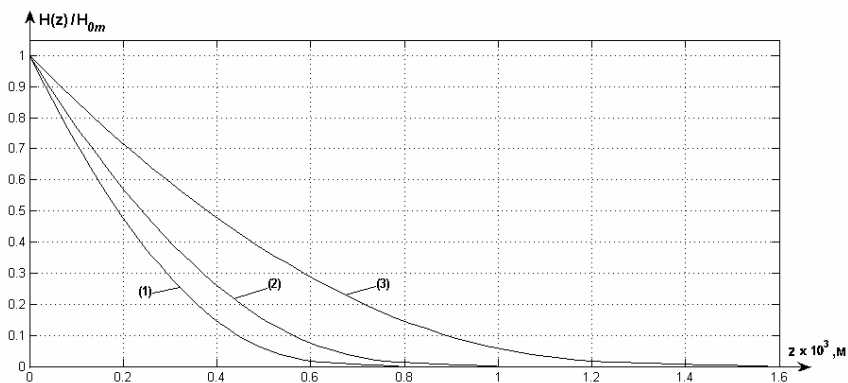


Рис. 7. Нормированные зависимости $H(z)$ в нелинейном варианте при $H_{0m} = 71000$ А/м и частотах $f = 2000$ Гц (кривая 1), $f = 5000$ Гц (кривая 2), $f = 8000$ Гц (кривая 3)

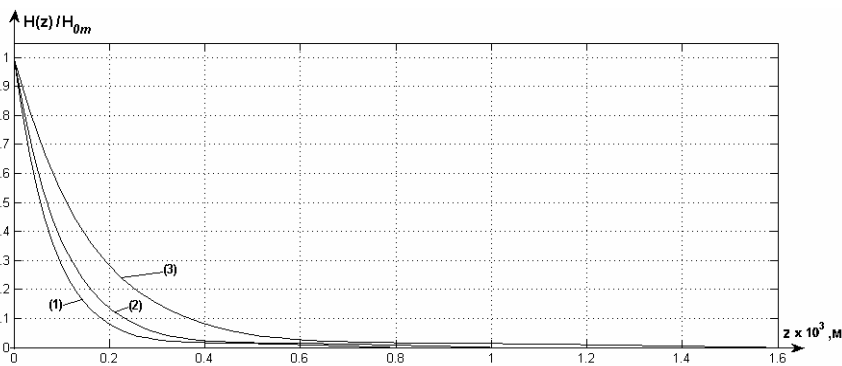


Рис. 8. Нормированные зависимости $H(z)$ в линейном варианте при $H_{0m} = 71000$ А/м и частотах $f = 2000$ Гц (кривая 1), $f = 5000$ Гц (кривая 2), $f = 8000$ Гц (кривая 3)

Библиографический список

1. Нейман Л.Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. – Л.: Госэнергоиздат, 1949. – 190 с.
2. Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.
3. Немков В.С., Полеводов Б.С. Математическое моделирование на ЭВМ устройств высокочастотного нагрева. – Л.: Машиностроение, 1980. – 210 с.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

УДК 621.3.011.013.

Интегральные уравнения для расчёта трёхмерного магнитного поля в анизотропной среде

С.Н. Кадников, д-р техн. наук, И.Е. Сергеева, асп.

Методика построения интегральных уравнений (ИУ) для расчёта поля в кусочно-однородных изотропных средах подробно рассмотрена в [1], где предложен ряд вариантов уравнений при различном расположении источников внешнего поля. В дальнейшем уравнения, полученные в [1], нашли широкое применение для расчёта поля различных электротехнических устройств. В отличие от этого методика построения ИУ для расчёта статического поля в анизотропных средах разработана явно недостаточно, не говоря уже о методике для расчета электромагнитного поля. Практический интерес представляют только две модели. Одна из них, приведённая в [1] и предназначенная для расчёта электростатического поля, основана на использовании потенциалов простого и двойного слоёв. Это приводит к нестандартной структуре уравнений, ядра которых содержат производные потенциала двойного слоя, что существенно затрудняет численное решение таких уравнений. Другая, более продуктивная модель получена в [2]. Здесь для построения ИУ использованы скалярный и векторный потенциалы простых слоёв зарядов и токов, причём скалярный потенциал используется в магнитной анизотропной среде, а векторный – в воздухе, где расположена обмотка, т.е. в изотропной среде. Эта модель с вычислительной точки зрения гораздо эффективней первой, однако практические возможности её ограничены. Существуют задачи, где источники поля (заданные токи) расположены в анизотропной магнитной среде. Например, при тепловом пробое изоляции в шихтованном магнитопроводе в области дефекта возникают местные токи, собственное магнитное поле которых может существенно исказить распределение основного магнитного потока. В этом случае для расчёта поля внутри магнитопровода целесообразно использовать в качестве расчётной функции векторный потенциал, поскольку построение скалярного потенциала для описания магнитного поля вихревых токов приводит к сложным и малоэффективным формулам [1]. Векторный потенциал необходимо использовать и при расчёте поля в кусочно-однородной анизотропной среде. Такие задачи возникают, например, при расчёте двигателей с постоянными магнитами или постоянных магнитов с составными магнитопроводами. Для решения задач данного типа, перечень которых можно продолжить, необходимо вывести дифференциальное уравнение относительно векторного потенциала магнит-

ного поля в анизотропной среде и найти его фундаментальное решение (функции Грина). Этот вопрос представляет определённый теоретический интерес, поскольку неизвестно, например, какую форму должен принять в анизотропной среде закон Био–Савара–Лапласа – один из основных законов постоянного магнитного поля.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Магнитное поле в однородной анизотропной среде создаётся некоторым распределением постоянных токов с плотностью $\vec{\delta}$, локализованных в области V_i , ограниченной поверхностью S . Векторы индукции \vec{B} и напряженности \vec{H} должны подчиняться уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$$

в области V_i и уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

в неограниченной области V_e , внешней по отношению к V_i . Выберем декартову систему координат, так чтобы оси x, y, z были параллельны главным осям тензора абсолютной магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_a = \mu_0 \mu_{ij}$ и обозначим диагональный тензор относительной магнитной проницаемости $\tilde{\mu}$, а его диагональные компоненты $-\mu_x, \mu_y, \mu_z$ (остальные равны нулю). Тогда

$$\vec{B} = \bar{i} \mu_0 \mu_x H_x + \bar{j} \mu_0 \mu_y H_y + \bar{k} \mu_0 \mu_z H_z. \quad (5)$$

Введём векторный потенциал посредством соотношения $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Учитывая, что $\vec{H} = \tilde{\mu}_a^{-1} \vec{B}$, из (1) получаем уравнение относительно \vec{A} :

$$\operatorname{rot} \tilde{\mu}_a^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{\delta}. \quad (6)$$

Введя новое выражение для векторного потенциала $\vec{A}_1 = \tilde{\mu} \vec{A}$, положим $\operatorname{div} \vec{A}_1 = 0$. (То, что данное условие действительно может быть выполнено, установлено ниже). Тогда, после замены переменных $x = \sqrt{\mu_x} x_1, y = \sqrt{\mu_y} y_1, z = \sqrt{\mu_z} z_1$, уравнение (6) можно записать в виде одного векторного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial z_1^2} = -\mu_0 \mu_x \mu_y \mu_z \bar{\delta}. \quad (7)$$

Решение данного уравнения может быть записано в виде

$$\bar{A}_{1q} = \mu_0 \mu_x \mu_y \mu_z \frac{1}{4\pi} \int_{V_{1q}} \bar{\delta}_{1p} \frac{dV_{1p}}{R_1}. \quad (8)$$

Переходя к исходным координатам x, y, z и функции \bar{A} , получаем для неё следующее выражение:

$$\bar{A}_q = \mu_0 (\mu_x \mu_y \mu_z)^{0,5} \frac{\tilde{\mu}^{-1}}{4\pi} \int_{V_i} \bar{\delta}_p \frac{dV_p}{R_a}, \quad (9)$$

где

$$R_a = \left(\frac{(x_q - x_p)^2}{\mu_x} + \frac{(y_q - y_p)^2}{\mu_y} + \frac{(z_q - z_p)^2}{\mu_z} \right)^{0,5}. \quad (10)$$

Учитывая, что $\bar{A}_1 = \tilde{\mu} \bar{A}$, нетрудно заметить, что условие $\text{div} \bar{A}_1 \equiv 0$, с помощью которого из (6) получено (7) будет выполняться, если

$$\text{div}_q \int_{V_i} \bar{\delta}_p \frac{dV_p}{R_a} = 0. \quad (11)$$

Если $\text{div} \bar{\delta} = 0$ в объёме V_i , что следует из уравнения (1), то равенство (11) будет тождеством при любой дифференцируемой функции, помещенной на место R_a^{-1} [3]. Таким образом, формула (9) действительно даёт решение уравнения (6), через которое могут быть выражены векторы \bar{B} и \bar{H} в уравнениях (1) – (4). В частности, для вектора напряженности $\bar{H} = \tilde{\mu}_a^{-1} \text{rot} \bar{A}$ получаем формулу

$$\bar{H}_q = \frac{1}{4\pi (\mu_x \mu_y \mu_z)^{0,5}} \int_{V_i} \frac{[\bar{\delta}_p, \bar{r}]}{R_a^3} dV_p, \quad (12)$$

где $\vec{r} = \vec{i}(x_q - x_p) + \vec{j}(y_q - y_p) + \vec{k}(z_q - z_p)$, а функция R_a определяется формулой (10). Для линейного тока силой I в замкнутом контуре l формула (12) принимает вид

$$\vec{H}_q = \frac{I}{4\pi(\mu_x\mu_y\mu_z)^{0,5}} \oint_l \frac{[d\vec{l}_p, \vec{r}]}{R_a^3}. \quad (13)$$

Данная формула выражает закон Био–Савара–Лапласа для однородной анизотропной среды.

При построении ИУ будет использоваться формула, аналогичная (9):

$$\vec{A}_q = \mu_0 (\mu_x\mu_y\mu_z)^{0,5} \frac{\vec{\mu}^{-1}}{4\pi} \oint_S \vec{i}_p \frac{dS_p}{R_a}, \quad (14)$$

где \vec{i}_p – плотность поверхностных токов.

Для расчета магнитного поля в кусочно-однородной анизотропной среде кроме векторного потребуется и скалярный потенциал. Дифференциальное уравнение для него получается из уравнений (3) и (4):

$$\mu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mu_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (15)$$

Фундаментальным решением данного уравнения является функция R_a^{-1} , где R_a определена формулой (10). Если считать, что в некоторой области изотропной среды V расположены объемные магнитные заряды с плотностью ρ , то, действуя так же, как и при выводе (9), можно найти выражение для потенциала объемных зарядов в анизотропной среде

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi(\mu_x\mu_y\mu_z)^{0,5}} \int_V \rho_p \frac{dV_p}{R_a}$$

и аналогичное выражение для потенциала простого слоя зарядов, распределенных на поверхности S ,

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi(\mu_x\mu_y\mu_z)^{0,5}} \oint_S \sigma_p \frac{dS_p}{R_a}. \quad (16)$$

Отметим, что потенциал (16) удовлетворяет уравнению (15) всюду вне S .

Рассмотри теперь методику построения ИУ, используя следующую модельную задачу. Постоянные токи с заданной плотностью $\vec{\sigma}_0$ расположены в неограниченной области V_e анизотропной среды с диагональным тензором магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_{ae} = \mu_0 \tilde{\mu}_e$ (рис. 1).

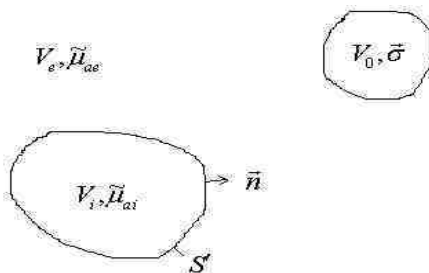


Рис. 1

Внутренняя ограниченная область V_i также заполнена анизотропной средой с диагональным тензором проницаемости $\tilde{\mu}_{ai} = \mu_0 \tilde{\mu}_i$ ($\tilde{\mu}_i \neq \tilde{\mu}_e$). Постоянные токи локализованы в области $V_0 \in V_e$. Векторы \vec{H}_i, \vec{H}_e вторичного поля, вызванного вторичными источниками на S , должны подчиняться следующим уравнениям: вектор \vec{H}_e – уравнению (1) в области V_0 и уравнению (3) в области $V_e - V_0$; вектор \vec{H}_i – уравнению (3) в области V_i . Вектор \vec{H} во всем пространстве, исключая S , должен удовлетворять уравнению (2).

На границе раздела сред должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих, векторов напряженности полного поля: $\vec{H}'_i = \vec{H}_i + \vec{H}_{0i}$, $\vec{H}'_e = \vec{H}_e + \vec{H}_{0e}$. Вектор \vec{H}_{0i} поля заданных токов определен только в области V_i при условии, что все пространство заполнено однородной анизотропной средой с тензором $\tilde{\mu}_{ai}$, аналогично вектор \vec{H}_{0e} определен только в области V_e при условии, что все пространство заполнено анизотропной средой с тензором $\tilde{\mu}_{ae}$. Согласно данному представлению внешнего поля касательные составляющие векторов вторичного поля должны подчиняться граничному условию

$$\left[\vec{n}, \vec{H}_e - \vec{H}_i \right] = \left[\vec{n}, \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e} \right]. \quad (17)$$

Кроме того, на поверхности S должны быть непрерывны нормальные составляющие индукции полного поля \vec{B}'_i, \vec{B}'_e . Это даст еще одно граничное условие:

$$\left(\vec{n}, \tilde{\mu}_e \vec{H}_e - \tilde{\mu}_i \vec{H}_i \right) = \left(\vec{n}, \tilde{\mu}_i \vec{H}_{0i} - \tilde{\mu}_e \vec{H}_{0e} \right). \quad (18)$$

Для построения ИУ в данной задаче необходимо применять метод разделения областей, в соответствии с которым в каждой из областей V_i, V_e следует использовать специальные представления для векторов поля \vec{H}_i, \vec{H}_e . В области V_e искомый вектор представим в виде $\vec{H}_e = \text{rot } \vec{A}_e$, где \vec{A}_e определим формулой (14). В результате

$$\vec{H}_{eq} = \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \frac{\left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right]}{R_{ae}^3} dS_p, \quad (19)$$

где $m_e = (\mu_{xe} \mu_{ye} \mu_{ze})^{0,5}$, R_{ae} – определено формулой (10) при $\mu_x = \mu_{xe}$, $\mu_y = \mu_{ye}$, $\mu_z = \mu_{ze}$, $x = x_e$, $y = y_e$, $z = z_e$.

В области V_i вектор \vec{H}_i определим как градиент потенциала (16):

$$\vec{H}_{iq} = \frac{\tilde{\mu}_i^{-1}}{4\pi m_i} \oint_S \sigma_p \frac{\vec{r}}{R_{ai}^3} dS_p, \quad (20)$$

где $m_i = (\mu_{xi} \mu_{yi} \mu_{zi})^{0,5}$, R_{ai} – определено формулой (10) при $\mu_x = \mu_{xi}$, $\mu_y = \mu_{yi}$, $\mu_z = \mu_{zi}$, $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$.

В выражениях (19), (20) векторы \vec{H}_i, \vec{H}_e определены вне S . Чтобы использовать граничные условия (17), (18), необходимо найти предельные значения выражений $[\vec{n}, \vec{H}_e]$, $[\vec{n}, \vec{H}_i]$, $(\vec{n}, \tilde{\mu}_e \vec{H}_e)$, $(\vec{n}, \tilde{\mu}_i \vec{H}_i)$ на поверхности S . Будем считать, что точка q находится на нормали к поверхности S в области V_e (вне S). Считая S поверхностью Ляпунова [4], рассмотрим выражение

$$[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq}] = \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \frac{\left[\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right] \right]}{R_{ae}^3} dS_p. \quad (21)$$

Используя формулу $\left[\vec{a} \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right] = \vec{b} (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – произвольные векторы, приведем (21) к виду

$$\left[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq} \right] = \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \vec{i}_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r}_e)}{R_{ae}^3} dS_p - \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \vec{r}_e \frac{(\vec{n}_q, \vec{i}_p)}{R_{ae}^3} dS_p. \quad (22)$$

Второй член в данном выражении при $q \in S$ является несобственным интегралом, что можно показать с помощью теории потенциала [4]. В первом члене произведем замену переменных: $x_1 = \frac{x_e}{\sqrt{\mu_{xe}}}$, $y_1 = \frac{y_e}{\sqrt{\mu_{ye}}}$, $z_1 = \frac{z_e}{\sqrt{\mu_{ze}}}$, в результате чего он примет вид

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \vec{i}_{1p} \frac{(\vec{n}_{1q}, \vec{R}_1)}{R_1^3} dS_{p1},$$

где индекс «1» указывает на использование координат x_1, y_1, z_1 , а $R_1 = \left((x_{1q} - x_{1p})^2 + (y_{1q} - y_{1p})^2 + (z_{1q} - z_{1p})^2 \right)^{0,5}$. Данное выражение является производной по нормали потенциала простого слоя с плотностью \vec{i}_{1p} . Его предельное значение на S известно [4]:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \vec{i}_{1p} \frac{(\vec{n}_{1q}, \vec{R}_1)}{R_1^3} S_p \Bigg|_{q \rightarrow S_1} = \frac{\vec{i}_{1q}}{2} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \vec{i}_{1p} \frac{(\vec{n}_{1q}, \vec{R}_1)}{R_1^3} dS_p. \quad (23)$$

Возвращаясь к переменным x_e, y_e, z_e и подставляя полученные выражения в (22), получим, что на S

$$\left[\vec{n}_q, \vec{H}_{eq} \right] = \frac{\vec{i}_q}{2} + \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \frac{\left[\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right] \right]}{R_{ae}^3} dS_p. \quad (24)$$

Предел выражения $\left[\vec{n}, \vec{H}_i \right]$ на поверхности S , где вектор \vec{H}_i представлен формулой (20), является сингулярным интегралом, существующим в смысле главного значения [5]. В итоге, подставляя полученные

выражения для $[\vec{n}, \vec{H}_i]$, $[\vec{n}, \vec{H}_e]$ в граничные условия (17), получаем первое из искомым интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{i}_q + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \frac{[\vec{n}_q [\vec{i}_p, \vec{r}_e]]}{R_{ae}^3} dS_p - \frac{\tilde{\mu}_e^{-1}}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p \frac{[\vec{n}_q, \vec{r}_i]}{R_{ai}^3} dS_p = \\ = 2[\vec{n}_q, \vec{H}_{0iq} - \vec{H}_{oeq}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Для построения второго интегрального уравнения необходимо вычислить предельное значение на S выражения $(\vec{n}, \tilde{\mu}_i \vec{H}_i)$, где \vec{H}_i определено формулой (20). Действуя так же, как и при выводе (23), получим, что на S

$$(\vec{n}_q, \tilde{\mu}_i \vec{H}_i) = -\frac{\sigma_p}{2} + \frac{1}{4\pi m_i} \oint_S \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r}_i)}{R_{ai}^3} dS_p. \quad (26)$$

Предел на S выражения $(\vec{n}, \tilde{\mu}_e \vec{H}_e)$, где \vec{H}_e выражено формулой (19), является сингулярным интегралом. В результате, подставляя $(\vec{n}, \tilde{\mu}_i \vec{H}_i)$ и (24) в граничное условие (18), получаем второе интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_p - \frac{1}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p \left[\frac{(\vec{n}_q, \vec{r}_i)}{R_{ai}^3} - k_1 \right] dS_p + \\ + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \frac{(\vec{n}_q \tilde{\mu}_i [\vec{i}_p, \vec{r}_e])}{R_{ae}^3} dS_p = 2(\vec{n}_q, \mu_i \vec{H}_{0i} - \mu_e \vec{H}_{0e}). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения (25), (27) образуют искомую систему ИУ для решения данной модельной задачи. К ядру первого интеграла добавлена константа k_1 , что равносильно выполнению условия

$$\oint_S \sigma_p dS_p = 0, \quad (28)$$

которое необходимо для единственности решения системы (25), (27).

Чтобы доказать единственность решения (25), (27), что необходимо для ее численного решения, положим правые части равными нулю и покажем, что полученная однородная система будет иметь только нулевое решение. Отметим вначале, что краевое условие (18), из которого было получено уравнение (27), после добавления константы k_1 к ядру первого интеграла может быть переписано в виде

$$\left(\vec{n}, \tilde{\mu}_{ae} \vec{H}_e - \tilde{\mu}_{ai} \vec{H}_i\right) - \frac{k_1 \mu_0}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p dS_p = \left(\vec{n}, \tilde{\mu}_{ai} \vec{H}_{0i} - \tilde{\mu}_{ae} \vec{H}_{0e}\right).$$

Проинтегрируем данное равенство по S . Учитывая, что $\tilde{\mu}_{ai} \vec{H}_e = \vec{B}_e = \text{rot } \vec{A}_e$, $\vec{H}_i = -\nabla \varphi_i$, $\text{div} \left(\mu_0 \mu_{xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \mu_0 \mu_{zi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) = 0$ согласно (15), после применения теоремы Гаусса, получаем условие (28), которому будет удовлетворять любое решение (27). Иными словами, при анализе системы (25), (27) можно рассматривать уравнения без учета константы k_1 , но при условии (28).

Перепишем однородное условие (17) в следующем виде: $\left[\vec{n}, \tilde{\mu}_{ai}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e \right] + \left[\vec{n}, \nabla \varphi_i \right] = 0$. Умножим его скалярно на \vec{A}_e и после циклической перестановки в смешанном векторном произведении и интегрирования по S получим

$$\oint_S \left(\left[\tilde{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e, \vec{A}_e \right] \vec{n} \right) dS + \oint_S \left(\left[\nabla \varphi_i, \vec{A}_e \right], \vec{n} \right) dS = 0. \quad (29)$$

Применяя теорему Гаусса для первого члена, найдем

$$\begin{aligned} \oint_S \left(\left[\tilde{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e, \vec{A}_e \right] \vec{n} \right) dS &= - \int_{V_e} \left(\text{rot } \tilde{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e, \vec{A}_e \right) dV + \\ &+ \int_{V_e} \left(\tilde{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e, \text{rot } \vec{A}_e \right) dV = \\ &= \mu_0 \int_{V_e} \left(\mu_{xe} H_{ex}^2 + \mu_{ye} H_{ey}^2 + \mu_{ze} H_{ez}^2 \right) dV = \int_{V_e} \left(\vec{B}_e \vec{H}_e \right) dV. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь было использовано векторное тождество $\text{div} \left[\vec{a}, \vec{b} \right] = \left(\vec{b} \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \text{rot } \vec{b} \right)$ и уравнение $\text{rot } \tilde{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e = 0$. Второй член в (29) может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \oint_S \left(\left[\nabla \varphi_i, \vec{A}_e \right] \vec{n} \right) dS &= \oint_S \left(\text{rot} \left(\varphi_i \vec{A}_e \right), \vec{n} \right) dS - \oint_S \varphi_i \left(\text{rot} \vec{A}_e, \vec{n} \right) dS = \\
 &= - \oint_S \varphi_i \left(\vec{B}_i, d\vec{S} \right) = - \int_{V_e} \text{div} \left(\varphi_i \vec{B}_i \right) dV = \\
 &= \mu_0 \int_{V_i} \left(\mu_{ix} H_{ix}^2 + \mu_{iy} H_{iy}^2 + \mu_{iz} H_{iz}^2 \right) dV = \int_{V_i} \left(\vec{B}_i, \vec{H}_i \right) dV.
 \end{aligned} \tag{31}$$

В результате, складывая (30), (31), согласно (29) получим

$$\int_{V_e} \left(\vec{B}_e, \vec{H}_e \right) dV + \int_{V_i} \left(\vec{B}_i, \vec{H}_i \right) dV = 0.$$

Подынтегральные выражения в каждом члене данного равенства неотрицательные (они выражают удвоенную плотность энергии магнитного поля), и поэтому $\vec{H}_i = 0, \vec{H}_e = 0$. В области V_i вектор \vec{H}_i определен равенством $\vec{H}_i = -\nabla \varphi_i$, и поэтому $\varphi_i = c_1 = \text{const}$. При этом следует учесть, что φ_i является потенциалом простого слоя, согласно формуле (16). Определим его в области V_e , считая, ее заполненной магнитной средой с тензором проницаемости $\tilde{\mu}_{ai}$. Переходя к координатам x_1, y_1, z_1 , можно показать [5], что полученный потенциал (обозначим его φ_e) при условии (28) будет равен нулю. Поскольку плотность простого слоя на S определяется разностью нормальных производных потенциалов φ_i и φ_e на S , приходим к выводу, что $\sigma = 0$. В результате вместо уравнения (25), правая часть которого равна нулю, получаем уравнение

$$\vec{i}_q + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \frac{\left[\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right] \right]}{R_{ae}^3} dS_p = 0. \tag{32}$$

Необходимо проверить, имеет ли данное уравнение ненулевые решения. Ранее было установлено, что $\vec{H}_e = \text{rot} \vec{A}_e = 0$. Будем считать, что все пространство заполнено однородной средой с тензором проницаемости $\tilde{\mu}_{ae}$ и определим вектор \vec{A}_i в области V_i согласно формуле (14). При условии $\text{div}_S \vec{i} = 0$, которое следует из уравнения (32), $\text{rot} \vec{H}'_i = 0$ [6]. Кроме того, $\text{div} \tilde{\mu}_e \vec{H}'_i = 0$, и поэтому вектор \vec{H}'_i можно определить формулой $\vec{H}'_i = -\nabla \varphi'_i$. Потенциал φ'_i будет удовлетворять в V_i уравнению

(15). Поскольку $\vec{H}_e = 0$, то на внутренней стороне S согласно краевому условию (18) (при $\vec{H}_{0i} = \vec{H}_{ae} = 0$)

$$B'_{in} = 0 \text{ или } (\vec{n}, \vec{\mu}_e \nabla \phi'_i) = 0. \quad (33)$$

Далее воспользуемся формулой

$$\operatorname{div} \phi'_i \vec{\mu}_e \nabla \phi'_i = \phi'_i \operatorname{div} \vec{\mu}_e \nabla \phi'_i + (\nabla \phi'_i, \vec{\mu}_e \nabla \phi'_i). \quad (34)$$

Первый член справа в этой формуле согласно (15) равен нулю. Считая функцию ϕ'_i дифференцируемой везде в V_i , интегрируя (34) по объему и применяя теорему Гаусса, можно показать, что $\phi'_i = c_i = \text{const}$ и $\vec{H}'_i = 0$. Разность касательных составляющих \vec{H}'_i и \vec{H}_e на S равна \vec{i} , откуда вытекает, что $\vec{i} = 0$, и поэтому уравнение (32) имеет только нулевое, а система (25), (27) – единственное решение. Однако этот вывод справедлив только для односвязных областей, в которых любой замкнутый контур можно стянуть в точку. Для многосвязных областей данный вывод не имеет места.

Рассмотрим, например, тороидальную катушку с равномерно и плотно намотанной обмоткой, которая может служить приближенной физической моделью данной краевой задачи. Поле вне такой обмотки можно считать равным нулю, но внутри нее оно нулю не равно. Циркуляция вектора \vec{H}_i по любому замкнутому контуру внутри обмотки равна числу ампер-витков. Применительно к данной задаче это равносильно следующей цепочке равенств:

$$\oint_{l_1} \vec{H}_i d\vec{l} = - \oint_{l_i} \nabla \phi'_i d\vec{l} = \phi'_{i+} - \phi'_{i-} = \oint_{l_i} i_n dl = I \neq 0, \quad (35)$$

где l_1 – любой замкнутый контур, охватывающий S изнутри, l_i – контур такого же типа, лежащий на внутренней стороне S , ϕ'_{i+}, ϕ'_{i-} – значения потенциалов на противоположных сторонах вспомогательной поверхности S_1 , пересекающей тор (рис. 2), i_n – нормальная к l_i составляющая тока \vec{i} . Из соотношений (35) следует, что для того чтобы поле внутри S было равно нулю, необходимо условие

$$\oint_{l_i} (\vec{i}, \vec{n}_i) dl = 0, \quad (36)$$

где \vec{n}_i – нормаль к l_i , лежащая в плоскости, касательной к S . Покажем, что данное условие достаточно для того, чтобы поле внутри S было равно нулю.

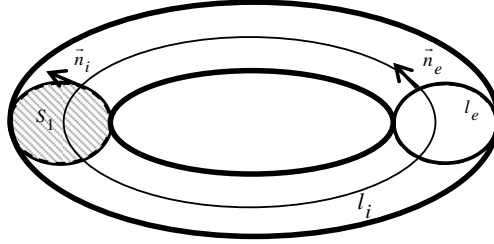


Рис. 2

Проинтегрируем (34) по области V_i с исключенной поверхстью S_1 и, применяя теорему Гаусса, получим

$$\begin{aligned} & \int_S \varphi'_i (\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i, \vec{n}) dS + \int_{S_1} \varphi'_{i+} (\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i, \vec{n}) dS - \\ & - \int_{S_1} \varphi'_{i-} (\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i, \vec{n}) dS = \int_{V_i} (\nabla \varphi'_i, \tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i) dV. \end{aligned} \quad (37)$$

В силу уравнения непрерывности $\operatorname{div} \tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i = 0$ на S_1 $(\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_{i+}, \vec{n}) = (\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_{i-}, \vec{n})$. Кроме того, на поверхности S нормальная составляющая вектора $\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i$ равна нулю. Поэтому вместо (37) получим

$$I \int_{S_1} (\tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i, \vec{n}) dS = \int_{V_i} (\nabla \varphi'_i, \tilde{\mu}_e \nabla \varphi'_i) dV.$$

Согласно условию (36) $I = 0$, и поэтому $\vec{H}'_i = 0$. Поскольку разность касательных составляющих \vec{H}'_i и \vec{H}_e на S равна \vec{i} , то $\vec{i} = 0$, т.е. уравнение (32) на двусвязной поверхности S не будет иметь ненулевых решений, что обеспечивает единственность решения системы (25), (27). Данный вывод справедлив, очевидно, при любой форме двусвязной поверхности S .

При численном решении (25), (27) условие (36) целесообразно внести в уравнение (25). Отметим, что в условии (36) контур l_i , охватывающий S , может быть выбран произвольно в силу [6] условия $\operatorname{div}_S \vec{i} = 0$, вытекающего из уравнения (25). Зафиксировав контур l_i , умножим (36) на $k_1 \vec{n}_i$, где k_1 – произвольный численный коэффициент, и сложим с уравнением (25):

$$\begin{aligned} \vec{i}_q + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \frac{[\vec{n}_q [\vec{i}_p, \vec{r}_e]]}{R_{ae}^3} dS_p + k_1 \vec{n}_{iq} \oint_{l_i} (\vec{i}, \vec{n}_i) dl + \\ + \frac{1}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p \frac{[\vec{n}_q, \vec{r}_i]}{R_{ai}^3} dS_p = 2[\vec{n}_q, \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Данное уравнение и уравнение (27) образуют систему, с помощью которой решается поставленная краевая задача. Чтобы в этом убедиться, перепишем (38) с учетом (17) в виде

$$[\vec{n}, \vec{\mu}_{ae}^{-1} \text{rot } \vec{A}_e] + \frac{k_1}{2} \vec{n}_{iq} \oint_{l_i} (\vec{i}, \vec{n}_i) dl - [\vec{n}, \nabla \varphi_i] = [\vec{n}_q, \vec{H}_{0i} - \vec{H}_{0e}].$$

Умножим данное равенство векторно на \vec{n} , затем скалярно на орт-вектор \vec{t}_i , касательный к контуру l_i , и проинтегрируем по l_i . В результате все члены, кроме содержащего интеграл, обратятся в нуль и данное соотношение сведется к условию (36). Таким образом, сумма уравнения (25) и условия (36) равносильна уравнениям (25) и (36), т.е. системе (25), (27), (36), равносильной системе (38), (27). Если численное решение (43), (32) производится путём редукции к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), то процесс вычислений можно организовать так, что добавления условия (36) к уравнения (25) будет равносильно добавлению одной или двух строк к матрице СЛАУ.

В другом варианте данной краевой задачи, когда источники внешнего поля расположены в области V_i , искомая система уравнений может быть построена по той же методике. В области V_i напряжённость вторичного поля определяется как $\vec{H}_i = \vec{\mu}_{ai}^{-1} \text{rot } \vec{A}_i$, где

$$\vec{A}_i = \frac{\vec{\mu}_{ai}^{-1}}{4\pi m_i} \oint_S \vec{i}_p \frac{dS_p}{R_{ai}}.$$

В области V_e $\vec{H}_e = -\nabla \varphi_e$, где

$$\varphi_e = \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \sigma_p \frac{dS_p}{R_{ae}}.$$

Формулы для предельных значений $[\vec{n}, \vec{H}_i]$ и $(\vec{n}, \vec{\mu}_{ae} \vec{H}_e)$ на S имеют вид

$$\left[\vec{n}_q, \vec{H}_{i\ q} \right] = -\frac{i_q}{2} + \frac{1}{4\pi m_i} \oint_S \frac{[n_q [\vec{i}_p, \vec{r}_i]]}{R_{ai}^3} dS_p, \quad (39)$$

$$(\vec{n}_q, \vec{\mu}_{ae} \vec{H}_e) = \frac{\sigma_q}{2} + \frac{1}{4\pi m_e} \oint_S \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r}_e)}{R_{ae}^3} dS_p. \quad (40)$$

После подстановки выражений для \vec{H}_0, \vec{H}_e в граничные условия (17), (18) и использования соотношений (39), (40) получится следующая система уравнений, аналогичная по структуре системе (25), (27):

$$\begin{aligned} \vec{i}_q - \frac{1}{2\pi m_i} \oint_S \frac{[n_q [\vec{i}_p, \vec{r}_i]]}{R_{ai}^3} dS_p + \frac{\vec{\mu}_{ae}^{-1}}{2\pi m_e} \oint_S \sigma_p \frac{[\vec{n}_q, \vec{r}_e]}{R_{ae}^3} dS_p = \\ = 2[\vec{n}_q, \vec{H}_{oi} - \vec{H}_{oe}], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_q + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r}_e)}{R_{ae}^3} dS_p - \frac{\vec{\mu}_{ai}^{-1}}{2\pi m_i} \oint_S \frac{[n_q [\vec{i}_p, \vec{r}_i]]}{R_{ai}^3} dS_p = \\ = 2(\vec{n}_q, \vec{H}_{oi} - \vec{H}_{oe}). \end{aligned} \quad (42)$$

Данная система имеет единственное решение, если область V_i – односвязная. Интегральный оператор относительно σ во втором уравнении в корректировке не нуждается, поскольку интегральное уравнение внешней задачи Неймана имеет единственное решение. Если область V_i двухсвязная и ограничена поверхностью тороидального типа, то нужно использовать дополнительное условие вида $\oint_{l_e} (\vec{i}, \vec{n}_e) dl = 0$, где l_e – замкнутый контур,

лежащий на внешней стороне S , \vec{n}_e – орт-вектор нормали к l_e , лежащий в плоскости, касательной к S (рис. 2). Данное условие обеспечивает равенство нулю циркуляции вектора \vec{H}_e по любому контуру, охватывающему поверхность S . После умножения на $K_1 \vec{n}_e$ оно должно быть добавлено к уравнению (41), что обеспечит единственность решения системы (41), (42).

В заключение можно отметить, что изложенный способ обеспечения единственности интегральных уравнений, предназначенных для расчёта магнитостатического поля, аналогичен приёмам построения однозначно разрешимых интегральных уравнений для расчёта электростатического поля. Если в электростатике для этой цели используются интегральные условия, наложенные на заряды, то в данном случае – магнитостатике – интегральные условия, наложенные на полные токи. Отличие, однако, состоит в том, что в электростатике характер дополнительных условий не зависит, в отличие от магнитостатики, от топологических свойств расчётных областей.

Библиографический список

1. **Тозони О.В., Маергойз И.Д.** Расчёт трёхмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974. – 352 с.
2. **Маергойз И.Д.** Расчёт статических полей в кусочно-однородных анизотропных средах // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1972. – №2.
3. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
4. **Гюнтер Н.М.** Теория потенциала и приложение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 360 с.
5. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
6. **Кадников С.Н.** Метод интегральных уравнений для расчета электромагнитного поля / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2003. – 340 с.

УДК 533.9

О влиянии импульсов напряжения на неоднородную плазму

*А.М. Солунин, М.А. Солунин, кандидаты физ.-мат. наук,
С.А. Солунин, научн. сотр.*

Под неоднородной плазмой мы понимаем заряженную среду (например, ионизованный газ), электрическое поле которой неоднородно. Последнее обусловлено либо пространственным зарядом плазмы, либо геометрией поля. Независимо от способа описания важными характеристиками плазмы будут силы, действующие на составляющие ее заряженные частицы. Они определяются вторым законом Ньютона. Поэтому рассмотрим уравнение движения заряженной частицы в стационарном $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и внешнем (наложенном, возмущающем) периодическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Следуя методу, изложенному в [1], можно показать, что при определенных условиях, о которых будет сказано ниже, возможно усреднение правой части уравнения (1) по периоду колебаний внешнего поля. В результате получается уравнение движения со стационарной правой частью:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{don}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\mathbf{F}_{\text{don}}(\mathbf{r})$ – дополнительная стационарная (не зависящая явно от времени) сила, вид которой определяется как стационарным полем, так и видом возмущения.

В [2] приведено выражение для дополнительной силы, когда внешнее поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi)$. Приведем выражение для дополнительной силы, когда амплитуда гармонического возмущения постоянна, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)$:

$$\mathbf{F}_{\text{don}} = \frac{\pi q}{\omega} \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 q^2}{m\omega^2} \nabla E^2. \quad (3)$$

Окончательному результату (3) предшествует предварительный результат, зависящий от фазы колебаний:

$$\mathbf{F}_{\text{don}}(\varphi) = \frac{\pi q}{\omega} \dot{\mathbf{E}} + (\pi \cos \varphi + \sin \varphi) \frac{q^2}{m\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 q^2}{m\omega^2} \nabla E^2. \quad (4)$$

Если распределение по фазе однородно (частицы независимы), то после усреднения выражения (4) получим (3). В физике плазмы это модель независимых частиц.

Проиллюстрируем эффект действия силы (3) на заряженные частицы катодного слоя тлеющего разряда. Катодный слой – это узкая область, электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ которой направлено к катоду и резко спадает в направлении от катода. Если на катодный слой наложено внешнее переменное электрическое поле, то на электроны и ионы слоя будет действовать дополнительная сила (3). Первое слагаемое в (3) зависит от знака заряда частицы и направления ее скорости ($\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E}$). Поэтому первое слагаемое замедляет электроны, движущиеся от катода и ускоряет положительные ионы, движущиеся к катоду. Второе слагаемое в (3) не зависит от знака заряда час-

тицы и направлено к катоду, то есть оно, как и первое слагаемое, замедляет электроны и ускоряет положительные ионы. Важно отметить, что частоты внешнего поля, при которых справедливо представление о дополнительной силе, различны для электронов и ионов, и различие это составляет два порядка. Поэтому, если частота внешнего поля подобрана так, что дополнительная сила действует на электроны, то действием дополнительной силы на ионы вследствие их большой массы можно пренебречь. Если же частота подобрана так, что дополнительная сила действует на ионы, то нельзя говорить о дополнительной силе, действующей на электроны.

Выражение (3) можно обобщить, если предположить, что на частицу плазмы действует линейная по скорости сила трения

$$F_{mp} = -mvv, \quad (5)$$

где в модели независимых частиц ν – эффективная частота столкновений. В этом случае вместо (3) получим [2]:

$$F_{don} = \frac{1-\beta}{\nu} q\dot{\mathbf{E}} - \frac{1-\beta}{2mv^2} q^2 \nabla E^2 + \frac{\pi\beta q^2}{2m\omega\nu} \nabla(E^2), \quad (6)$$

где
$$\beta = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\nu t} dt = \frac{1}{2\pi\nu} \omega \left(1 - \exp\left(-2\pi \frac{\nu}{\omega}\right) \right).$$

Из (6) при $\nu/\omega \rightarrow 0$ получается (3). Интересной особенностью выражения (6) является то, что оно имеет предел при $\omega/\nu \rightarrow 0$:

$$F_{don} = \frac{q}{\nu} \dot{\mathbf{E}} - \frac{q^2}{4m\nu^2} \nabla E^2. \quad (7)$$

Метод, использованный при получении приведенных выше выражений для дополнительной силы, может быть использован при любых периодических возмущениях стационарного поля. Мы это сделаем для импульсов прямоугольной формы (прямоугольные импульсы с постоянной амплитудой рассмотрены в [3]).

Пусть возмущение имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}), & 0 < t < \tau; \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases} \quad (8)$$

Разложим поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в ряд относительно положения, которое условно примем за нулевое. Предположим далее, что за период колебания внешнего поля частица проходит расстояния, в пределах которых поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ меняются незначительно. Тогда при разложении их в ряд можно ограничиться первым приближением:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0). \quad (9)$$

Подставляя это разложение в уравнение (1), получим линейное уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0, \quad (10)$$

которое можно решать методом последовательных приближений. Считая, что второе и четвертое слагаемые в (10) малы по сравнению с первым и третьим слагаемыми, и отбрасывая их, получим уравнение движения в нулевом приближении:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q\mathbf{E}_0. \quad (11)$$

Его решение имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \frac{q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0)}{2m} t^2 + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2, & 0 < t < \tau; \\ \mathbf{r}_2(t) = \frac{q\mathbf{E}_0}{2m} t^2 + \mathbf{C}_3 t + \mathbf{C}_4, & \tau < t < T. \end{cases} \quad (12)$$

Начальные условия

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (13)$$

и условия сшивания решений

$$\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau), \quad \dot{\mathbf{r}}_1(\tau) = \dot{\mathbf{r}}_2(\tau) \quad (14)$$

позволяют найти постоянные интегрирования:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{C}_2 = 0, \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}_0}{m} \tau, \quad \mathbf{C}_4 = -\frac{q\mathbf{E}_0}{2m} \tau^2. \quad (15)$$

Подставляя решение (12) уравнения (11) в правую часть уравнения (10) и усредняя ее по периоду колебаний внешнего поля, получим уравнение движения вида (значки «0» у \mathbf{v}_0 , \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_0 , определяющие начало разложения (9), теперь надо отбросить)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{дон}}(\mathbf{r}) + \frac{\tau}{T}q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где дополнительная сила, получающаяся в результате усреднения второго и четвертого слагаемых правой части уравнения (10), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{дон.}} = & \frac{1}{2}qT\dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{6}\frac{q^2}{2m}T^2\nabla E^2 + \left(1 - \frac{\tau}{T} + \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{T^2}\right)\tau T\frac{q^2}{2m}(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \\ & + \frac{1}{2}qT\dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{3}\frac{q^2}{2m}T^2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \left(1 - \frac{\tau}{T} + \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{T^2}\right)\tau T\frac{q^2}{2m}(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учет силы трения (5) приводит к уравнению движения:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (18)$$

Подставляя сюда разложение (9), получаем уравнение первого порядка

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 + q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 \quad (19)$$

и его нулевое приближение

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q\mathbf{E}_0. \quad (20)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид¹

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = C_1 + C_2 e^{-\nu t} + \frac{q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0)}{m\nu}t, & 0 < t < \tau; \\ \mathbf{r}_2(t) = C_3 + C_4 e^{-\nu t} + \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu}t, & \tau < t < T. \end{cases} \quad (21)$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий (13) и условий сшивания (14):

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{v_0}{\nu} - \frac{q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0)}{m\nu^2}, \quad C_2 = -C_1, \quad C_3 = \frac{v_0}{\nu} - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu^2} + \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu}\tau, \\ C_4 = -\frac{v_0}{\nu} + \frac{q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0)}{m\nu^2} - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu}e^{\nu\tau}. \end{aligned} \quad (22)$$

¹ Это решение имеет частный вид. О строгом решении уравнения (20), уточняющем коэффициенты в выражении (25), см. приложение.

Подставив решение (21) в правую часть уравнения (10) и усреднив ее по периоду внешнего поля, получим уравнение движения вида (значки «0» у v_0 , \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_0 теперь отбросим)

$$m\ddot{r} + m\nu\dot{r} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{don}}(\mathbf{r}) + q\frac{\tau}{T}\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{don}} = & \left[1 - \frac{1}{\nu T}(1 - e^{-\nu T})\right] \frac{q}{\nu} \dot{\mathbf{E}} - \left[1 - \frac{1}{2}\nu T - \frac{1}{\nu T}(1 - e^{-\nu T})\right] \frac{q^2}{m\nu^2} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \\ & - \left[1 - \nu T + \frac{1}{2}\nu\tau + \frac{1}{\nu\tau}(e^{-\nu\tau} - e^{-\nu(T-\tau)})\right] \frac{\tau}{T} \frac{q^2}{m\nu^2} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \\ & + \left[1 - \frac{1}{\nu T}(1 - e^{-\nu T})\right] \frac{q}{\nu} \dot{\mathbf{E}} - \left[1 - \frac{1}{2}\nu T - \frac{1}{\nu T}(1 - e^{-\nu T})\right] \frac{q^2}{m\nu^2} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \\ & - \left[1 - \nu T + \frac{1}{2}\nu\tau + \frac{1}{\nu\tau}(e^{-\nu\tau} - e^{-\nu(T-\tau)})\right] \frac{\tau}{T} \frac{q^2}{m\nu^2} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (24)$$

Высокочастотный предел этого выражения ($\nu T \ll 1$) совпадает с выражением (17), а низкочастотный ($\nu T \gg 1$) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{don}} = & \frac{q}{\nu} \dot{\mathbf{E}} + \frac{q^2}{2m\nu} T (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{T}\right) \tau \frac{q^2}{m\nu} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \\ & + \frac{q}{\nu} \dot{\mathbf{E}} + \frac{q^2}{2m\nu} T (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{T}\right) \tau \frac{q^2}{m\nu} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (25)$$

Предположим, что на катодный слой тлеющего разряда действуют импульсы постоянной амплитуды \mathbf{E}_0 . Тогда выражение (17) принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{don}} = \frac{1}{2} q T \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{6} \frac{q^2}{2m} T^2 \nabla E^2 + \left(1 - \frac{\tau}{T} + \frac{1}{3} \frac{\tau^2}{T^2}\right) \tau T \frac{q^2}{2m} \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}). \quad (26)$$

Сила (26) качественно не отличается от (3), за исключением последнего слагаемого. Оно при $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}) > 0$ будет действовать так же, как и первые два слагаемых, то есть замедлять электроны и ускорять положительные ионы слоя.

Идея приложения полученных результатов связана с работой [1]. Исследуя механизм пробоя жидких диэлектриков (трансформаторного масла) переменным электрическим полем вида $\mathbf{E}(\mathbf{r})\sin\omega t$ промышленной частоты, установили, что на заряженные частицы примеси (ими были частицы графита) при линейной по скорости силе трения (5) действует стационарная сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4m(\omega^2 + v^2)} \nabla E^2(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Высокочастотный предел этой силы известен с 1958 г. [4]. Однако для частиц графита в масле при промышленной частоте $v/\omega \gg 1$, поэтому

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4mv^2} \nabla E^2. \quad (28)$$

Эта сила в отличие от дипольной направлена в сторону ослабления поля. Механизм пробоя авторы описывают следующим образом. Частицы графита, обладающие дипольным моментом, под действием этой силы движутся в область сильного поля, образуя мостики, по которым и развивается пробой. Если постоянное напряжение сменить на переменное, то кроме дипольной силы (также стационарной) на частицы графита действует сила (28), препятствующая образованию мостиков. Этим объясняется существенная разница в пробивных напряжениях, которая наблюдается в постоянном и переменном полях.

Совпадение выражений (28) и второго слагаемого в (7) позволяет высказать следующее соображение. Если в условиях, описанных в [1] (частицы графита в трансформаторном масле), на постоянное поле наложить возмущающее переменное поле промышленной частоты, то пробивное напряжение в постоянном поле увеличится.

Внешнее периодическое возмущение стационарного поля заряженной среды приводит к дополнительным силам, действующим на заряженные частицы среды. Это, в свою очередь, приведет к изменению стационарного поля в самой среде. Модель независимых частиц только иллюстрирует действие сил на частицы среды. Поведение же самой среды может описать гидродинамическая модель среды.

Приложение

Строгий вывод значений для коэффициентов должен учитывать любые положения импульса. Их два:

$$1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}), & t_0 < t < t_0 + \tau, \\ 0, & t_0 + \tau < t < T; \end{cases} \quad 2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}), & 0 < t < t_0, \\ 0, & t_0 < t < t_0 + T - \tau, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}), & t_0 + T - \tau < t < T; \end{cases}$$

поэтому

$$F_{don} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T-\tau} F_{don}^{(1)}(t_0) dt_0 + \int_0^{\tau} F_{don}^{(2)}(t_0) dt_0 \right].$$

Первому положению импульса отвечает решение

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1^{(1)}(t) = \frac{q\mathbf{E}_0}{2m} t^2 + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2, & 0 < t < t_0; \\ \mathbf{r}_2^{(1)}(t) = \frac{q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1)}{2m} t^2 + \mathbf{C}_3 t + \mathbf{C}_4, & t_0 < t < t_0 + \tau; \\ \mathbf{r}_3^{(1)}(t) = \frac{q\mathbf{E}_0}{2m} t^2 + \mathbf{C}_5 t + \mathbf{C}_6, & t_0 + \tau < t < T, \end{cases}$$

и вместе с начальным условием (13) и условиями сшивания

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^{(1)}(t_0) &= \mathbf{r}_2^{(1)}(t_0), \quad \dot{\mathbf{r}}_1^{(1)}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_2^{(1)}(t_0), \\ \mathbf{r}_2^{(1)}(t_0 + \tau) &= \mathbf{r}_3^{(1)}(t_0 + \tau), \quad \dot{\mathbf{r}}_2^{(1)}(t_0 + \tau) = \dot{\mathbf{r}}_3^{(1)}(t_0 + \tau). \end{aligned}$$

определяем постоянные интегрирования. Сила $F_{don}^{(1)}(t_0)$ определяется подстановкой решения для $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ во второе и четвертое слагаемые уравнений (10) и (19) и усреднением по правилу

$$\langle \mathbf{r}^{(1)}(t_0) \rangle = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_0} \mathbf{r}_1^{(1)}(t) dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{r}_2^{(1)}(t) dt + \int_{t_0+\tau}^T \mathbf{r}_3^{(1)}(t) dt \right].$$

Библиографический список

1. Волков В.Н., Крылов И.А. Эффект выталкивания заряженных частиц суспензии из области сильного переменного электрического поля // Новые методы исследования в теоретической электротехнике и инженерной электрофизике: Межвуз. сб. науч. тр. / Иван. энерг. ин-т им. В.И. Ленина. – Иваново, 1976. – С. 76–83.
2. Солунин А.М., Солунин М.А., Солунин С.А. О движении в быстроосциллирующем поле // Изв. вузов. Физика. – №10. – 2003. – С. 53–57.
3. Солунин А.М., Солунин М.А., Солунин С.А. О влиянии импульсов напряжения на неоднородную плазму // Высоковольтные техника и электротехнология: Межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 3 / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2003. – С. 112–116.
4. Гапонов А.В., Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34. – № 2. – С. 242–243.

УДК 621.313.311.3

Принципы и методы расчёта величин напряжённостей магнитных и электрических полей промышленной частоты, подлежащих гигиенической оценке и нормированию

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, Н.Б. Рубцова, д-р биол. наук, А.Ю. Токарский, канд. техн. наук

Введение. Источниками переменного магнитного поля (МП) являются любые электропроводящие устройства, в которых протекает переменный (изменяющийся во времени t) электрический ток. Источники переменного МП, токи которых изменяются во времени с частотой $f = 50$ Гц, называются источниками МП промышленной частоты (ПЧ).

Однофазные МП ПЧ. Однофазными называются источники переменного МП ПЧ, токи которых изменяются во времени с одинаковыми значениями начальных фазных углов ψ . Однофазный источник МП ПЧ создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, напряжённость h которого в мгновенной форме описывается выражением

$$h = H_m \sin(\omega t + \psi),$$

где H_m – амплитудное значение напряжённости h МП; $\omega = 2\pi f$ – угловая (фазовая) частота.

Годографом (математической линией, описываемой в пространстве концом вектора \vec{h} за время, равное одному периоду) вектора напряжённости \vec{h} однофазного МП является прямая линия.

В комплексной форме записи (переход на комплексную плоскость) последнее выражение будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{H}_m = H_m e^{j\psi}.$$

Для однофазного источника МП нормируется (устанавливается и контролируется предельно допустимое значение – гигиенический норматив) действующее (эффективное) значение H напряжённости МП:

$$H = \frac{H_m}{\sqrt{2}}.$$

При наличии N однофазных источников МП ПЧ для возможности их суммирования сначала определяются составляющие вектора напряжённости поля по осям координат, допустим по осям OY и OZ , – двумерное или плоское МП, для каждого i -го источника (комплексная форма записи для действующих значений):

$$\dot{H}_{Yi} = H_{Yi}e^{j\psi} \text{ и } \dot{H}_{Zi} = H_{Zi}e^{j\psi} ,$$

после чего проводится векторное (с учётом направления «согласовано – встречно» в пространстве) суммирование напряжённостей МП по составляющим:

$$\dot{H}_{\Sigma Y} = \sum_{i=1}^{i=N} \dot{H}_{Yi} \text{ и } \dot{H}_{\Sigma Z} = \sum_{i=1}^{i=N} \dot{H}_{Zi} .$$

Результирующее действующее значение напряжённости МП, создаваемое всеми N источниками однофазного поля (нормируемое значение), определяется по теореме Пифагора:

$$H_{\Sigma} = \sqrt{H_{\Sigma Y}^2 + H_{\Sigma Z}^2} .$$

Если МП, создаваемое однофазными источниками, является трёхмерным, т.е. имеющим составляющие напряжённости по трём осям координат OX , OY и OZ , то его результирующее действующее значение определяется по выражению

$$H_{\Sigma} = \sqrt{H_{\Sigma X}^2 + H_{\Sigma Y}^2 + H_{\Sigma Z}^2} .$$

Многофазные двумерные МП ПЧ. Многофазными источниками МП ПЧ являются источники, токи которых имеют различные значения начальных фазных углов ψ . Если напряжённости, создаваемые этими источниками МП, имеют только две составляющие по осям координат, допустим \vec{h}_Y и \vec{h}_Z , то они называются двумерными или плоскими. Такие источники создают в окружающем пространстве МП, вектор напряжённости которого описывает в пространстве эллипс, и эти поля носят название эллиптических МП.

Модуль вектора \vec{h} напряжённости эллиптического МП в произвольный момент времени t может быть определён следующим образом (рис. 1):

$$h = \sqrt{h_z^2 + h_y^2} = h_z \sin \alpha + h_y \cos \alpha, \quad (1)$$

где $h_i = H_{mi} \sin(\omega t + \psi_i)$ – проекция вектора \vec{h} на ось Oi (i – индекс осей координат Y или Z ; H_{mi} – амплитудное значение проекция вектора \vec{h} на ось Oi); α – угол, характеризующий положение в пространстве вектора \vec{h} в момент времени t (рис. 1).

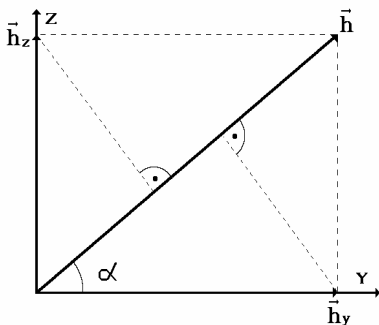


Рис. 1. К определению вектора напряжённости магнитного поля в момент времени t

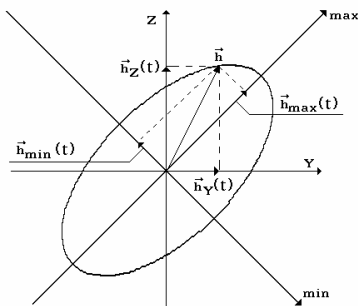


Рис. 2. Вращение вектора \vec{h} по эллипсу

Вектор \vec{h} вращается по часовой стрелке или против с угловой скоростью $\omega_b(t)$, изменяющейся во времени (рис. 2).

Изменение угла α во времени описывается выражением

$$\alpha = \int_0^T \omega_b(t) dt + \alpha_0, \quad (2)$$

где $T = 1/f$ – период изменения вектора \vec{h} во времени; α_0 – угол наклона вектора \vec{h} к оси OY в момент времени $t = 0$.

Как видно из рис. 1 и 2, угол α может быть определен по выражению

$$\alpha = \frac{h_z}{h_y} = \operatorname{arctg} \frac{H_{mz} \sin(\omega t + \psi_z)}{H_{my} \sin(\omega t + \psi_y)}. \quad (3)$$

При изменении t от 0 до T конец вектора \vec{h} опишет плоскую кривую, представляющую собой эллипс, \vec{h} можно разложить на составляющие по большей \vec{h}_{max} и меньшей \vec{h}_{min} полуосям эллипса.

При равенстве фазных углов ψ_y и ψ_z эллипс вырождается в прямую линию, что соответствует полю однофазного источника; при $\psi_y - \psi_z = \pm\pi/2 \times (2n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, и $H_{my} = H_{mz}$ эллипс переходит в окружность.

Рассмотрим случаи прохождения вектором \vec{h} экстремальных положений, т.е. таких положений, когда \vec{h} совпадает с большей (*max*) или меньшей (*min*) полуосью эллипса. Продифференцируем первое из равенств выражения (1) по t и приравняем правую часть к нулю. После ряда преобразований получим выражение для моментов времени, соответствующих экстремумам \vec{h} , т.е. тех моментов времени, когда вектор \vec{h} проходит оси *max* или *min* [2]:

$$t_{\text{эк}} = \frac{1}{2\omega} \arctg \left[(-1) \frac{H_y^2 \sin(2\psi_y) + H_z^2 \sin(2\psi_z)}{H_y^2 \cos(2\psi_y) + H_z^2 \cos(2\psi_z)} \right]. \quad (4)$$

Определим угловую скорость вращения вектора \vec{h} по эллипсу, для чего продифференцируем выражение (2) по t . Тогда, с учётом (3), получим

$$\omega_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\omega \cdot H_y \cdot H_z \cdot \sin(\psi_z - \psi_y)}{H_y^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \psi_y) + H_z^2 \cdot \sin^2(\omega t + \psi_z)}. \quad (5)$$

Модуль полного вектора \vec{h} определим по выражению

$$h = \sqrt{H_y^2 \sin^2(\omega t + \psi_y) + H_z^2 \sin^2(\omega t + \psi_z)}. \quad (6)$$

На рис. 3 показано изменение модуля полного вектора \vec{h} и скорости его вращения ω_0 в зависимости от времени t при $H_y = H_z = 1$ кА/м, $\psi_y = 0$ и $\psi_z = 20^\circ$.

Как видно из рис. 3, максимальным значениям h соответствуют минимальные значения ω_0 . Это подтверждает то, что угловая скорость про-

хождения вектором \vec{h} большей полуоси эллипса значительно ниже, чем скорость при прохождении им меньшей полуоси эллипса.

Очевидно, что вектор \vec{h} можно рассматривать не только как векторную сумму составляющих \vec{h}_y и \vec{h}_z , а также как сумму векторов, являющихся проекциями на большую \vec{h}_{max} или меньшую \vec{h}_{min} оси эллипса (см. рис. 2). Тогда

$$\begin{aligned} \vec{h}(t) &= \vec{h}_{max}(t) + \vec{h}_{min}(t), \\ \vec{h}_{max}(t) &= \bar{r}_{max}^{\circ} H_m^{max} \sin(\omega t + \psi_{max}), \\ \vec{h}_{min}(t) &= \bar{r}_{min}^{\circ} H_m^{min} \sin(\omega t + \psi_{min}). \end{aligned}$$

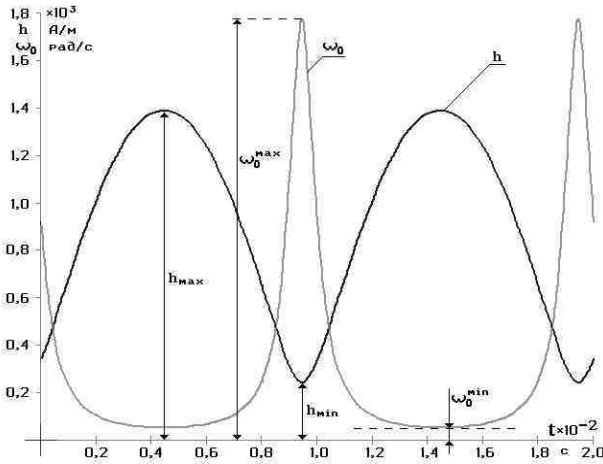


Рис. 3. Изменение модуля полного вектора \vec{h} и скорости его вращения ω_0 в зависимости от времени t при $H_y = H_z = 1$ кА/м, $\psi_y = 0$ и $\psi_z = 20^\circ$

В новой системе координат положение осей эллипса зафиксировано, а его форма определяется значениями H_m^{max} , H_m^{min} , ψ_{max} и ψ_{min} . Однако, принимая значения ψ_{max} и ψ_{min} такими, чтобы $\psi_{max} - \psi_{min} = \pm \frac{\pi}{2}(2n+1)$, мы сможем получить эллипс любой формы, оперируя лишь величинами

H_m^{max} и H_m^{min} . Задаваясь значениями $\psi_m^{max} = n\pi$ и $\psi_m^{min} = n\frac{\pi}{2}$, где n – любое целое число, перейдем к уравнению эллипса, записанному в координатах осей min и max , для чего используем коэффициент эллипсности [1]

$$K_{\mathcal{O}} = \frac{H^{min}}{H^{max}} = \frac{\sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}}}{\sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 + \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}}},$$

где $H^{min} = \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}}$ – действующее значение проекции вектора \vec{h} на меньшую полуось эллипса, а

$$H^{max} = \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 + \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2\right)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}} - \quad (7)$$

действующее значение проекции вектора \vec{h} на большую полуось эллипса.

Для эллиптического поля нормируется действующее значение проекции \vec{h} на большую полуось эллипса, т.е. H^{max} .

Приняв $H^{max} = 1$, можно упростить выражения (1) – (4):

$$h(t) = \sqrt{\cos^2(\omega t) + K_{\mathcal{O}} \sin^2(\omega t)} = \quad (8)$$

$$= \cos(\omega t) \cos \alpha + K_{\mathcal{O}} \sin(\omega t + n\pi) \sin \alpha,$$

$$\alpha = \int_0^T \omega_0(t) dt = \arctg \left[\frac{1}{K_{\mathcal{O}}} \operatorname{tg}(\omega t) \right], \quad (9)$$

$$t_{\text{эк}} = \frac{n\pi}{2\omega}, \quad \alpha_0 = 0. \quad (10)$$

Теперь нетрудно получить зависимость $\omega_0(t)$, продифференцировав (8) по t . После ряда преобразований получим

$$\omega_0(t) = \frac{K_{\mathcal{O}} \omega \sec^2(\omega t)}{K_{\mathcal{O}}^2 + \operatorname{tg}^2(\omega t)}. \quad (11)$$

Ранее рассмотренный в системе координат YOZ эллипс с $H_y = H_z = 1$ кА/м, $\psi_y = 0$ и $\psi_z = 20^\circ$ имеет $K_{\mathcal{E}} = 0,176$, $H_m^{max} = 1,393$ кА/м и $H_m^{min} = 245,6$ А/м. На рис. 4 показано изменение модуля полного вектора \vec{h} и скорости его вращения ω_0 для приведенного эллипса с $K_{\mathcal{E}} = 0,176$ в зависимости от времени t . Поскольку при переходе к приведённому эллипсу происходит поворот осей отсчёта на угол (α_0) отклонения большей полуоси эллипса от оси OY , то кривые $h(t)$ и $\omega_0(t)$ в сравнении с теми же кривыми рис. 3 сдвигаются по времени, не меняя своих значений и формы.

Значения модуля вектора \vec{h} определялись по выражению

$$h = \sqrt{[H_{my}^{max} \sin(\omega t)]^2 + [H_{mz}^{min} \sin(\omega t)]^2}.$$

Подставив (10) в (11), получим связь экстремумов $\omega_0(t)$ с фазовой частотой ω

$$\omega_0^{max} = \omega / K_{\mathcal{E}}, \quad (12)$$

$$\omega_0^{min} = K_{\mathcal{E}} \omega. \quad (13)$$

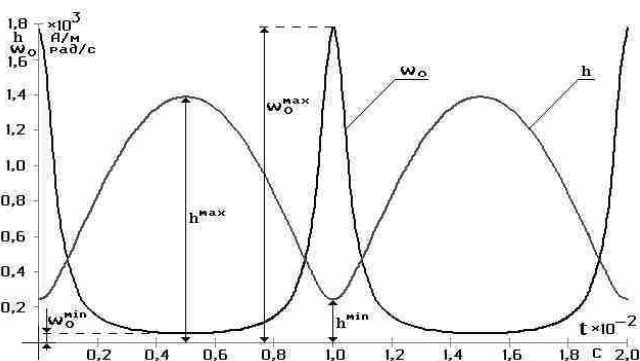


Рис. 4. Изменение модуля полного вектора \vec{h} и скорости его вращения ω_0 для приведенного эллипса с $K_{\mathcal{E}} = 0,176$ в зависимости от времени t

Следовательно, чем меньше коэффициент эллипсности, тем медленнее вектор \vec{h} проходит свое максимальное значение, но тем больше его ско-

рость при прохождении минимальных значений. Из выражений (12) и (13) можно получить еще две зависимости:

$$\omega^2 = \omega_0^{max} \cdot \omega_0^{min}, \quad K_{\mathcal{E}}^2 = \left(\omega_0^{min} / \omega_0^{max} \right).$$

На рис. 5 показана зависимость экстремальных значений $\omega_0(t)$ от коэффициента эллипсности $K_{\mathcal{E}}$. Пунктирная линия соответствует ω_0 , численно равной фазовой частоте $\omega = 2\pi f$. Кривая, расположенная выше пунктирной линии, показывает зависимость от $K_{\mathcal{E}}$ скорости ω_0^{max} , а ниже пунктирной линии – скорости ω_0^{min} . При $K_{\mathcal{E}} = 0$ ω_0^{max} не определена, т.к. в данном случае скорость вращения ω_0 вектора \vec{h} определяется величиной $\omega_0^{min} = 0$. Действительно, при $K_{\mathcal{E}} = 0$ ($H^{min} = 0$) эллипс вырождается в отрезок прямой линии, что исключает возможность вращения \vec{h} . Направление вращения вектора \vec{h} однозначно определяется значениями фазных углов. При $\psi_y - \psi_z > 0$ ω_0 положительна и \vec{h} вращается против часовой стрелки, при $\psi_y - \psi_z < 0$ ω_0 – отрицательна, а при $\psi_y - \psi_z = 0$ $\omega_0 = 0$.

Действующее, но не учитывающее эллиптического характера МП значение модуля \vec{h} определяется по выражению для однофазных полей [2]

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{\left(H^{max}\right)^2 + \left(H^{min}\right)^2}. \quad (14)$$

Используя коэффициент эллипсности $K_{\mathcal{E}}$ и выражение (14), можно получить соотношения между H и каждым из экстремальных значений вектора \vec{h} [2]:

$$H^{max} = H / \sqrt{1 + K_{\mathcal{E}}^2}, \quad H^{min} = (K_{\mathcal{E}} H) / \sqrt{1 + K_{\mathcal{E}}^2}. \quad (15)$$

Многофазные трёхмерные МП ПЧ. Если многофазные источники создают МП ПЧ, вектор напряжённости хотя бы одного из которых имеет составляющие по трём осям координат, то поля таких источников носят эллипсоидный характер, т.е. конец вектора напряжённости МП, создаваемого всеми источниками, движется по кривой, лежащей на поверхности эллипсоида.

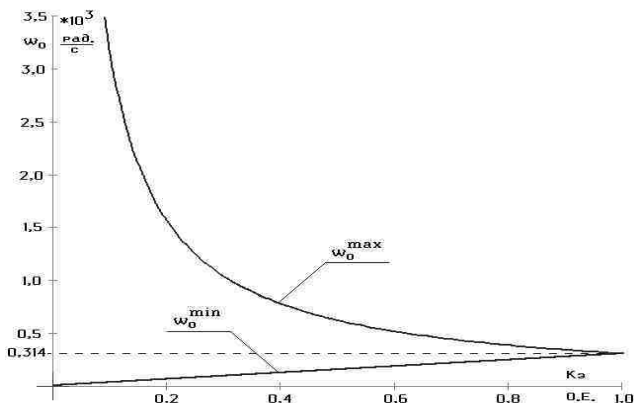


Рис. 5. Зависимость ω_0^{max} и ω_0^{min} от K_3

Предположим, что две составляющие напряжённости МП в плоскости YOZ изменяются во времени в соответствии с выражениями

$$h_z = \sqrt{2}H_z \sin(\omega t) \quad \text{и} \quad h_y = \sqrt{2}H_y \sin(\omega t + 45^\circ),$$

тогда для действующих значений напряжённости поля конец результирующего вектора \vec{H} (действующее значение) в пространстве будет описывать эллипс, показанный на рис. 6.

Модуль вектора \vec{H}_{yz}^{max} в плоскости YOZ определится выражением [1]

$$H_{yz}^{max} = \sqrt{\frac{1}{2}(H_z^2 + H_y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(H_z^2 + H_y^2)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}}. \quad (16)$$

Проекции \vec{H}_y^{max} и \vec{H}_z^{max} вектора \vec{H}_{yz}^{max} на оси OY и OZ найдём по выражениям (рис. 6)

$$H_y^{max} = H_{yz}^{max} \cos \alpha; \quad H_z^{max} = H_{yz}^{max} \sin \alpha, \quad (17)$$

где α – угол наклона вектора \vec{H}_{yz}^{max} к горизонтальной оси плоскости YOZ , т.е. к оси OY .

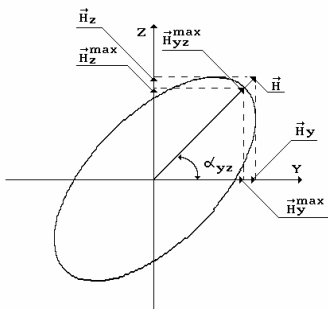


Рис. 6. Определение составляющих \vec{H}_{yz}^{max} эллиптического поля по осям декартовой системы координат

Угол α определяется по выражению (3). Время прохождения вектором напряжённости МП экстремумов эллипса, т.е. больших или меньших его полуосей, находится по выражению (4). Выражение (4) определяет время прохождения ближайшего к моменту $t = 0$ экстремума, т.е. большей или меньшей полуоси эллипса. Нас интересует только большая полуось, поэтому, найдя $t_{эк}$, а затем угол α , необходимо проверить, какой экстремум соответствует этим значениям времени и угла по выражению (5) для угловой скорости вращения вектора напряжённости МП. Если в момент прохождения экстремума $\omega_0(t_{эк}) < \omega$ (где $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$), то угол α и время $t_{эк}$ соответствуют положению и времени прохождения большей полуоси эллипса. Если $\omega_0(t_{эк}) > \omega$, то угол α и время $t_{эк}$ соответствуют положению и времени прохождения меньшей полуоси эллипса и к $t_{эк}$ надо добавить 0,005 с, или угол α повернуть на 90° , что равнозначно.

Аналогичные картины вращения по эллипсу напряжённости МП поля и выражения для его составляющих можно получить в плоскостях XOY и XOZ . На рис. 7 показано расположение в плоскостях XOY , XOZ и YOZ составляющих напряжённости \vec{H}^{max} по большей полуоси эллипсоида (нормируемый параметр), по которому движется конец вектора напряжённости МП в трёхмерном пространстве. Модуль вектора напряжённости \vec{H}^{max} можно определить по его проекции на одну из плоскостей, допустим на плоскость XOY , т.е. по вектору \vec{H}_{yz}^{max} , и проекции на перпендикулярную этой плоскости ось координат, в данном случае ось Ox , т.е.

$$H^{max} = \sqrt{\left(H_{yz}^{max}\right)^2 + \left(H_x^{max}\right)^2}. \quad (18)$$

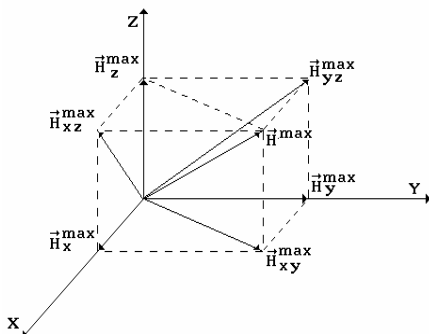


Рис. 7. К определению действующего значения напряжённости МП по большей полуоси эллипсоида

Расчёт напряжённостей электрических и магнитных полей по методу мгновенных значений. Применяется также метод расчёта напряжённостей ЭП и МП ПЧ в выражениях для мгновенных значений. По этому методу используются следующие выражения для определения напряжённости МП:

- выражения для составляющих по осям координат напряжённостей, создаваемых каждым i -м источником из общего числа N источников МП:

$$\begin{aligned} h_{Xi}(t) &= H_{mXi} \sin(\omega t + \varphi_{Xi}), \\ h_{Yi}(t) &= H_{mYi} \sin(\omega t + \varphi_{Yi}), \\ h_{Zi}(t) &= H_{mZi} \sin(\omega t + \varphi_{Zi}); \end{aligned} \quad (19)$$

- выражения суммирования составляющих напряжённостей МП от всех N источников по каждой оси координат:

$$h_{\Sigma X}(t) = \sum_{i=1}^N h_{Xi}(t), \quad h_{\Sigma Y}(t) = \sum_{i=1}^N h_{Yi}(t), \quad h_{\Sigma Z}(t) = \sum_{i=1}^N h_{Zi}(t); \quad (20)$$

- выражение для определения модуля результирующего значения напряжённости МП:

$$h(t) = \sqrt{h_{\Sigma X}^2(t) + h_{\Sigma Y}^2(t) + h_{\Sigma Z}^2(t)}. \quad (21)$$

Расчёт по выражениям (19) – (21) производится для каждого момента времени t от 0 до T с шагом Δt . Из полученных значений h выбирается наибольшее h^{max} , которое является амплитудным значением напряжённости H_m^{max} МП по большей полуоси, в данном случае эллипсоида. Действующее значение напряжённости определяется по выражению

$$H^{max} = \frac{H_m^{max}}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Выводы

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Скорость ω_0 вращения вектора \vec{h} напряженности эллиптического магнитного поля, создаваемого трехфазными источниками, непостоянна в течение периода. Скорость ω_0 минимальна при прохождении вектором \vec{h} большей полуоси эллипса и максимальна при прохождении меньшей.

2. Экстремальные значения ω_0 зависят от коэффициента эллипсности K_Σ . При $K_\Sigma = 0$ эллипс вырождается в прямую линию, по которой пульсирует вектор \vec{h} , а при $K_\Sigma = 1$ эллипс переходит в окружность и вектор \vec{h} вращается с постоянной скоростью $\omega_0 = \omega$.

3. Действующее значение напряжённости МП, создаваемого одним однофазным источником поля, определяется выражением $H = (H_m / \sqrt{2})$; действующее значение напряжённости двухмерного МП, создаваемого N однофазными источниками, определяется выражением $H_\Sigma = \sqrt{H_{\Sigma Y}^2 + H_{\Sigma Z}^2}$, а трёхмерного – выражением $H_\Sigma = \sqrt{H_{\Sigma X}^2 + H_{\Sigma Y}^2 + H_{\Sigma Z}^2}$.

4. Действующее значение напряжённости эллиптического МП определяется выражением (7):

$$H^{max} = \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2 \right)^2 + \sqrt{\left(H_z^2 + H_y^2 \right)^2 - 4H_z^2 H_y^2 \sin^2(\psi_y - \psi_z)}}.$$

5. Действующее значение напряжённости эллипсоидного МП определяется выражениями (16) – (18) с использованием выражений (3) – (5).

Выражение (7) определяет как действующее значение напряжённости H^{max} эллиптического МП, так и действующее значение напряжённости H однофазного МП.

6. Действующее значение напряжённости эллипсоидного МП, рассчитываемого по выражениям (16) – (18), полностью определяет напряжённости как однофазного, так и эллиптического МП.

7. Расчёт напряжённости МП ПЧ в мгновенных значениях проводится по выражениям (19) – (21) для одного периода T с шагом Δt . Чем меньше шаг расчёта, тем точнее его результат, но больше время проведения расчёта. Наибольшее из полученных значений h^{max} является амплитудным значением составляющей напряжённости МП ПЧ по большей оси эллипсоида, а его действующее значение определяется по выражению (22).

8. При рассмотрении электрического поля (ЭП) составляющие его вектора напряжённости по осям Y и Z в общем случае также не совпадают по фазным углам. Модуль вектора ЭП в мгновенной форме записи может быть определен выражением, аналогичным (1), – $e = \sqrt{e_z^2 + e_y^2} = e_y \cos \alpha + e_z \sin \alpha$. Таким образом, конец вектора \vec{e} за один период описывает в пространстве эллипс или эллипсоид точно так же, как и вектор \vec{h} . Поэтому все выражения от (1) до (18) могут быть применены к магнитному полю с заменой обозначений h на e и H на E .

9. Определение значения напряжённости ЭП методом мгновенных значений проводится по выражениям (19) – (22) с заменой h и H на e и E .

На примере одноцепной ВЛ 500 кВ традиционной конструкции рассмотрим расхождения значений E и E^{max} , а также H и H^{max} . На рис. 8 показана конструкция рассматриваемой линии. Фазы ВЛ выполнены проводом 3×АС-400/51 с шагом расщепления 400 мм.

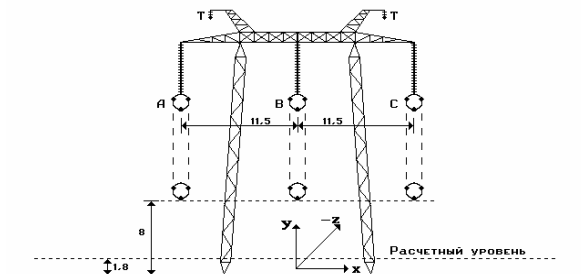


Рис. 8. Промежуточная опора ВЛ 500 кВ и расположение осей координат

На рис. 9 показана картина распределения E , H , определённых по теореме Пифагора, и E_{max} и H_{max} , полученных по выражению (7), на уровне 1,8 м от поверхности земли при габарите «нижний провод фазы – земля», равном 8 м (индексы « max » у напряжённостей по большим полуосям эллипсов для удобства перенесены вниз).

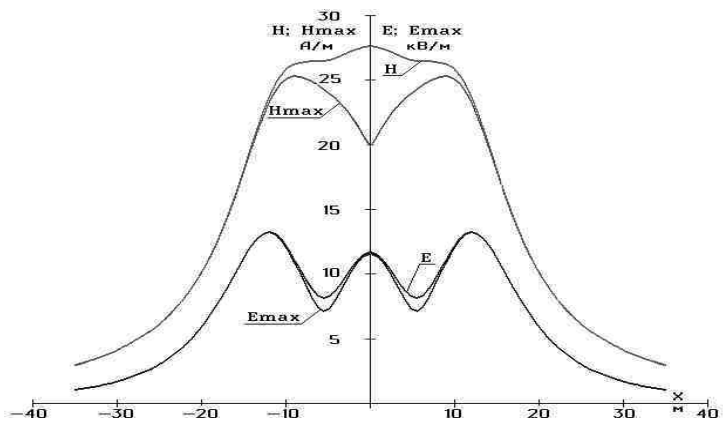


Рис. 9. Распределение E , E_{max} , H и H_{max} на уровне 1,8 м от поверхности земли при габарите «нижний провод фазы – земля», равном 8 м

Наибольшее превышение E над E_{max} составляет 1,5 кВ/м и приходится на $X = \pm 6$ м. Это расхождение не имеет принципиального значения, т.к. соответствует зоне минимальных значений напряжённости МП. Коэффициент эллипсности магнитного поля при $X = \pm 6$ м $K_{\ominus} = 0,54$. Максимальное расхождение между H и H_{max} составляет 7,5 А/м при $X = 0$ м, так как в этом случае $K_{\ominus} = 0,96$. Зона значительного превышения H над H_{max} относится к области максимальных значений напряжённости МП и поэтому имеет существенное значение.

Библиографический список

1. Кац Р.А., Перельман Л.С. Расчет электрического поля трехфазной линии электропередачи // Электричество. – 1978. – №1. – С. 16–19.
2. Токарский А.Ю., Кацман С.Е. Пространственно-временные характеристики вектора напряженности электрического поля линий электропередачи переменного напряжения // Моделирование и автоматизация электрических систем / Риж. политехн. ин-т. – Рига, 1981. – С. 53–60.

УДК 621.313.311.3

Математическая оценка и измерение электромагнитных факторов, действующих на персонал, обслуживающий высоковольтные электроустановки

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, А.Ю. Токарский, канд. техн. наук.

Введение. На человека, находящегося вблизи высоковольтных установок (ВУ), действуют следующие электромагнитные факторы: электрические поля (ЭП) промышленной частоты (ПЧ) и связанные с ними аэроионные и емкостные токи, магнитные поля (МП) ПЧ, а также поля широкополосного спектра (ШПС) электромагнитного излучения (ЭМИ) коронного разряда (КР) на проводах фаз линии. В результате проведенных исследований были определены уровни воздействия на человека электромагнитных факторов, разработаны средства защиты от воздействия этих факторов.

Электрические и магнитные поля ВЛ СВН. Электрические поля, создаваемые воздушными линиями (ВЛ) электропередачи сверхвысокого напряжения (СВН) и ультравысокого напряжения (УВН), сравнительно легко рассчитываются для случая их расположения над ровной поверхностью земли. В действительности поверхность земли не является ровной, что приводит к расхождению результатов расчётов и измерений на 5 – 10 %. Магнитные поля обычным (не ферромагнитным) грунтом, над которым расположены ВЛ СВН, не искажаются, и расхождения в результатах расчётов и измерений незначительны и находятся в пределах погрешности приборов измерения.

Планишеты распределения напряжённостей ЭП и МП. Наиболее активными источниками ЭП и МП, воздействующими на человека, являются ВЛ СВН, поскольку они имеют большую протяжённость и могут проходить по населённой местности.

Для оценки уровней воздействия этих полей на человека, находящегося вблизи высоковольтных линий, составлены и продолжают составляться планишеты распределения напряжённостей ЭП (E_{max}) и МП (H_{max}) на уровнях 0,5, 1,5 и 1,8 м от поверхности земли в сечении ВЛ 110 – 1150 кВ. В качестве примера на рис. 1 – 4 показаны результирующие кривые распределения напряжённостей E_{max} и H_{max} (большая полуось эллипса) на уровне 1,8 м в сечении ВЛ 500 кВ в зависимости от расстояния нижнего провода фазы до земли.

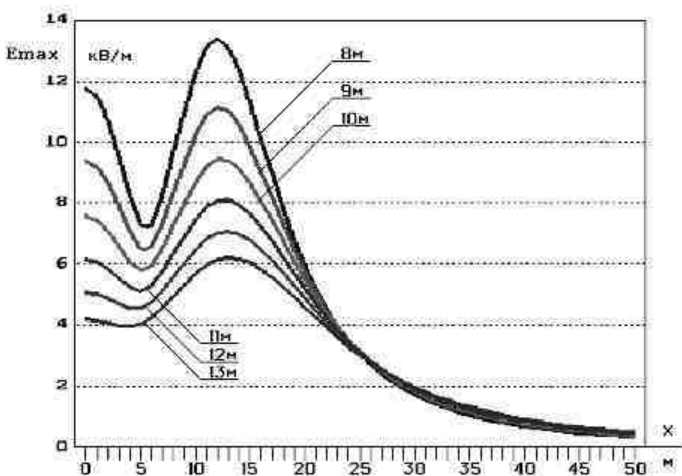


Рис. 1. Графики распределения напряженности электрического поля в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для габаритов «нижний провод фазы – земля» 8, 9, 10, 11, 12 и 13 м

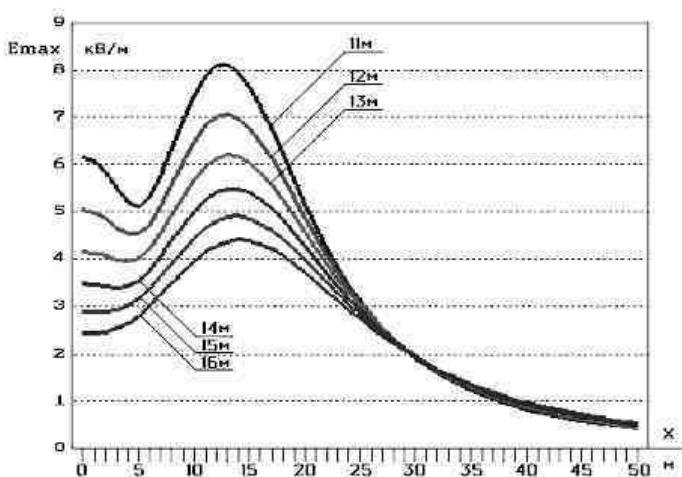


Рис. 2. Графики распределения напряженности электрического поля в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для габаритов «нижний провод фазы – земля» 11, 12, 13, 14, 15 и 16 м

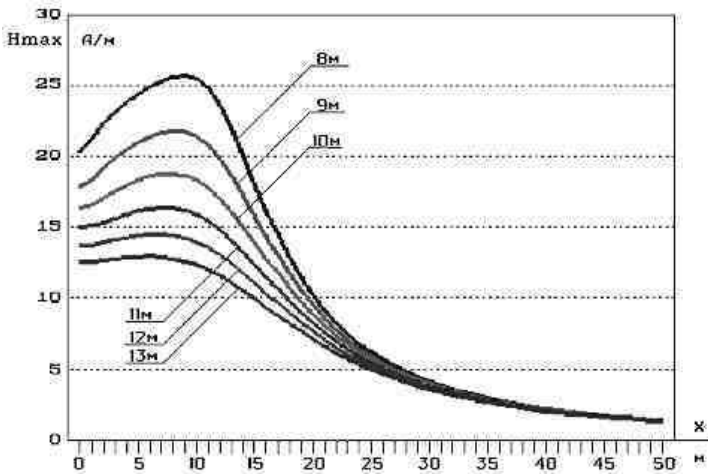


Рис. 3. Графики распределения напряженности магнитного поля в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для габаритов «нижний провод фазы – земля» 8, 9, 10, 11, 12 и 13 м

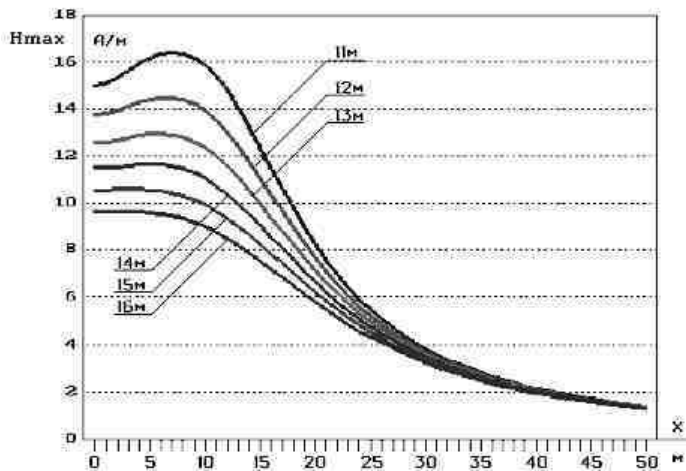


Рис. 4. Графики распределения напряженности магнитного поля в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для габаритов «нижний провод фазы – земля» 11, 12, 13, 14, 15 и 16 м

Магнитные поля в зоне работ под напряжением на ВЛ СВН и УВН. При проведении работ под напряжением (ПРН) линейный персонал находится в интенсивном МП, которое защитный комплект не экранирует. Для определения уровней напряжённости H МП в зоне ПРН в целях определения опасных зон, где H превышает предельно допустимые значения, были проведены расчёты распределения экволиний H в сечении фаз ВЛ 220 – 1150 кВ переменного тока и ВЛ 1500 кВ постоянного тока. На рис. 6 показано распределение экволиний H в сечении ВЛ 500 кВ, а на рис. 7 – в сечении ВЛ 1500 кВ. Эти данные учитывались при обосновании предельно допустимых уровней (ПДУ) МП ПЧ при ПРН в «ОБУВ переменных магнитных полей частотой 50 Гц при производстве работ под напряжением на ВЛ 220 – 1150 кВ» № 5060-89.

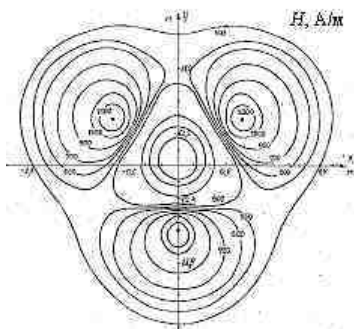


Рис. 6. Распределение H в сечении средней фазы ВЛ 500 кВ переменного тока

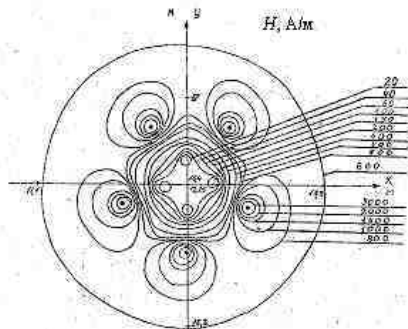


Рис. 7. Распределение H в сечении полюса ВЛ 1500 кВ постоянного тока

Магнитные поля в зоне ПРН во время коротких замыканий. На ВЛ 750 кВ ПС Владимирская – Калининская АЭС проводились испытания режимов однофазных коротких замыканий (КЗ). МП (рис. 8 и 9) на поверхности проводов повреждённой фазы и грозозащитных тросов в момент коротких замыканий имеют значения (22,8 кА/м – для фазы и 23,4 кА/м – для троса), превышающие действующие в РФ безопасные уровни напряжённости H МП для общего воздействия (3,2 кА/м) более чем в 7 раз, а для локального воздействия (5,2 кА/м) – в 4,4 раза.

Однако время существования магнитного поля такой интенсивности всего 0,06 с, что не позволяет сопоставлять эти значения с нормативными, так как последние установлены не для импульсных, а для непрерывных режимов воздействия. Величины плотности тока j , наведенного маг-

нитными полями от токов КЗ в головном мозге человека, проводящего ПРН на ВЛ 750 кВ, составляют 21 мА/м^2 – для провода фазы и 18 мА/м^2 – для троса и не создают опасного воздействия на человека.

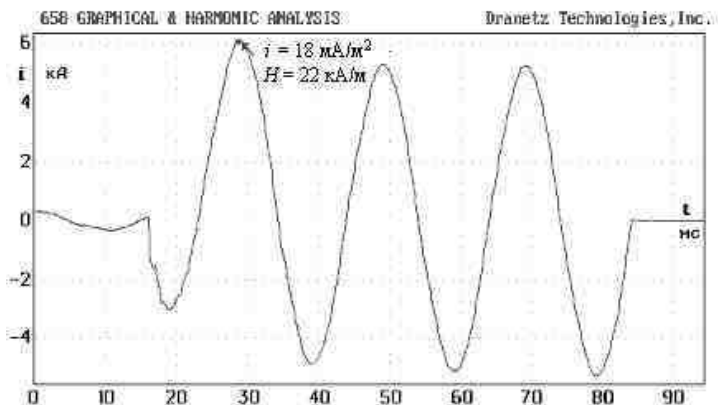


Рис. 8. Осциллограмма тока короткого замыкания в поврежденной фазе ВЛ 750 кВ

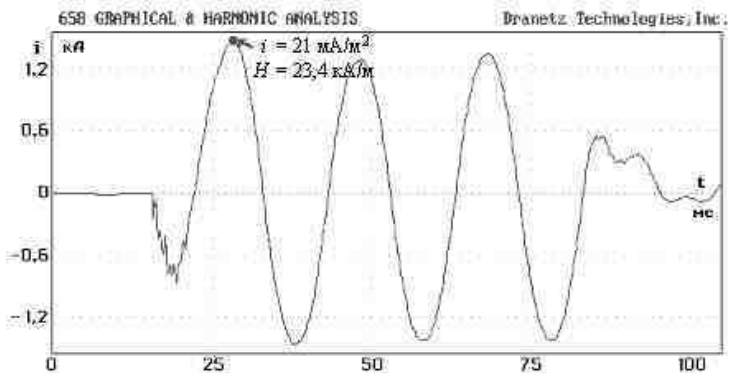


Рис. 9. Осциллограмма тока в грозозащитном тросе, наведенного в момент однофазного короткого замыкания ВЛ 750 кВ

В момент успешного ОАПВ токи в подключаемой фазе и в тросах носят не синусоидальный характер (рис. 10 и 11), т.е. имеют большое число составляющих высших гармоник. Плотности токов j , наводимых магнитными полями этих токов в головном мозге человека, проводящего

ПРН на ВЛ 750 кВ, имеют сложный характер изменения во времени (рис. 12 и 13), а их амплитуды достигают значений 182 и 116 мА/м^2 .

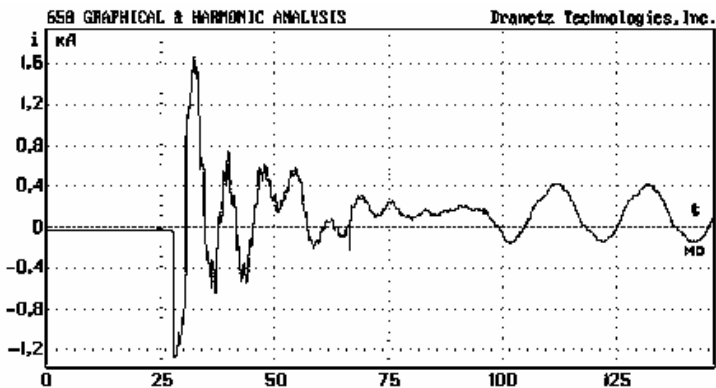


Рис. 10. Оциллограмма тока в фазе ВЛ 750 кВ после успешного автоматического повторного включения

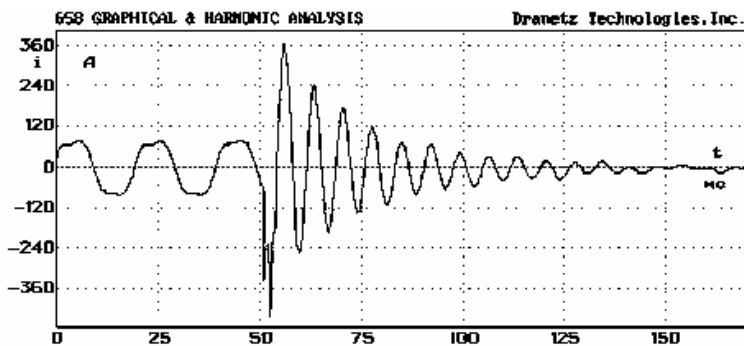


Рис. 11. Оциллограмма тока в грозотросе ВЛ 750 кВ после успешного автоматического повторного включения

При плотности тока j , находящейся в пределах $1 - 10 \text{ мА/м}^2$, отмечаются лишь минимальные эффекты, не представляющие опасности для человека, при $j = 10 - 100 \text{ мА/м}^2$ – выраженные эффекты (зрительные и со стороны нервной системы), при $j = 100 - 1000 \text{ мА/м}^2$ – стимуляция возбудимых структур, возможно неблагоприятное влияние на здоровье, а при j ,

превышающей 1000 mA/m^2 , возможна экстрасистолия, фибрилляция желудочков сердца (острое поражающее действие).

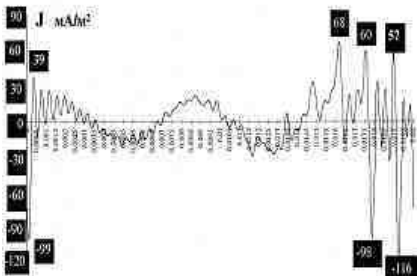


Рис. 12. Плотность тока j в мозге человека, создаваемая током в тросе в момент ОАПВ

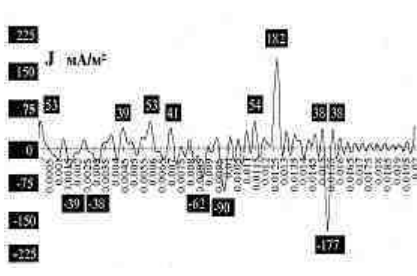


Рис. 13. Плотность тока j в мозге человека, создаваемая током в фазе в момент ОАПВ

Результаты испытаний показали, что в момент КЗ j находится в области выраженных (ощутимых) воздействий. В момент ОАПВ j – в зоне стимуляции возбудимых структур. Величина тока КЗ зависит от сопротивления петли короткого замыкания. Максимальные расчетные значения токов короткого замыкания для сети ВЛ 500 кВ Мосэнерго достигают 20 – 30 кА (действующие значения), тогда величины H и j могут увеличиться в 5 – 6 раз.

Величина и форма фазного тока в момент ОАПВ зависит от напряжения ВЛ, её параметров (индуктивности, емкости, активного сопротивления и т.д., для различных конструкций линий эти параметры различны) и от характеристик дуги выключателя в момент его включения. ВЛ 1150 кВ имеет в 1,5 – 1,8 раза меньшую, чем у ВЛ 750 кВ, индуктивность, в 1,3 – 1,7 раза большую емкость. На ВЛ такого класса напряжения применяются воздушные выключатели с ещё большим секционированием зоны разрыва дуги. Тогда амплитудные значения j для ВЛ 1150 кВ в момент успешного ОАПВ могут быть в 2 – 3 раза больше, чем у ВЛ 750 кВ. При этом в момент КЗ на линии 1150 кВ j переходит в зону ощутимых воздействий, а в момент ОАПВ приближается к зоне поражающего действия. Наличие постоянно действующего комплекса неблагоприятных факторов производственной среды при ПРН и условия повышенной опасности при выполнении работ на высоте, что уже является фактором риска, позволяют считать, что токи, наводимые в головном мозге импульсными МП, возникающими при успешных ОАПВ, могут приводить к повышению степени риска потери здоровья и представлять дополнительную опасность для человека.

Устройства измерения уровней электромагнитных факторов. Расчёт распределения напряжённости ЭП по поверхности тела человека, находящегося под ВЛ СВН или на территории открытого распределительного устройства (ОРУ) высоковольтной подстанции (ПС), довольно сложен и не достаточно точен, тем более если этот расчёт должен проводиться для человека, одетого в экранирующий комплект. Также очень сложно и дорого математически смоделировать и рассчитать уровни электромагнитного излучения (ЭМИ) коронного разряда (КР), а также распределение его параметров по поверхности тела человека или животного. В этих случаях целесообразно применение фантомных методов измерения, т.е. следует проводить измерения на поверхности манекена человека или животного, выполненного в натуральную величину и помещённого в реальные или максимально приближённые к реальным условия.

Устройство для измерения емкостных токов в частях тела человека, находящегося в ЭП ПЧ, создаваемого ВУ. Выполнено в форме макета вертикально стоящего человека (МВСЧ-1) в натуральную величину (рис. 14).



Рис. 14. Устройство МВСЧ-1



Рис. 15. Устройство МВСЧ-3

МВСЧ-1 имеет два слоя покрытия из латунной фольги и электропроводящей эпоксидной краски с проводимостью, равной средней проводимости тела человека. Покрытия разделены на 10 зон измерения: голова, торс, плечи правой и левой рук, предплечья правой и левой рук, таз, правая нога, бедро левой ноги и голень со стопой левой ноги. Устройство оснащено выносным блоком управления со стрелочной индикацией ре-

зультатов измерения. Использовалось для проверки экранирующих свойств комплектов защиты человека от воздействия ЭП.

Устройство МВСЧ-3 (рис. 15) предназначено для измерения распределения E ЭП по поверхности тела человека, оснащено 64 емкостными измерительными датчиками, встроенными системами коммутации и измерения, а также системой ввода-вывода информации на ЭВМ, с которой осуществляется управление процессом измерения и обработка результатов измерений. Как и устройство МВСЧ-1, устройство МВСЧ-3 использовалось для стендовой проверки экранирующих свойств комплектов защиты человека от воздействия ЭП. При проверке с помощью устройств МВСЧ защитных свойств экранирующих от ЭП комплектов было установлено, что под экранирующим комплектом уровни ЭП не превышают предельно допустимых (установленных в РФ) и обеспечивают надежную защиту работающих.

Устройство МВСЧ-2 предназначено для измерения распределения напряжённости (E) ЭП по поверхности тела человека. МВСЧ-2, как и все последующие устройства этого типа, усилено изнутри покрытием из стеклоткани с эпоксидной смолой и имеет два наружных покрытия из алюминиевой фольги и электропроводящей краски. Оснащено 82 емкостными измерительными электродами, установленными в акупунктурных точках (рис. 16, а), встроенными автономным источником питания, системой коммутации и измерения, а также цифровой индикацией результатов измерения, расположенной на спине устройства. Управление процессом измерения автоматическое. Устройство использовалось для измерения распределения напряжённости (E) ЭП по поверхности тела человека на рабочих местах персонала ПС и линейного персонала, а также проверки экранирующих свойств комплектов защиты человека от воздействия ЭП (рис. 16, б).

В табл. 1 приведены выборочные результаты измерения E на поверхности МВСЧ-2, находящегося на дорожке открытого распределительного устройства (ОРУ) подстанции (ПС) 750 кВ. МВСЧ-2 измеряет величину емкостного тока, протекающего через измерительный электрод с нормированной площадью поверхности. Величина тока в дальнейшем пересчитывается в напряжённость E ЭП. Измерения показали, что при величине E неискаженного ЭП на уровне 1,8 м от поверхности земли, равной 17 кВ/м, E на поверхности тела МВСЧ-2 изменялась от 2,8 кВ/м – грудь, до 243 кВ/м – кончик носа. Таким образом, результаты измерений показывают значительные различия в уровнях искаженного ЭП на поверхности тела че-

ловека и свидетельствуют о возможности локальных эффектов ЭП при уровнях неискаженного поля, укладываемых в нормативные значения.

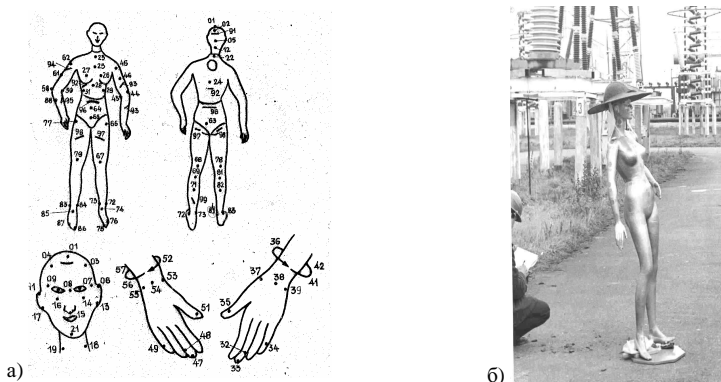


Рис. 16. Применение МВСЧ для измерения токов в частях тела человека:
 а – схема размещения электродов на поверхности устройства МВСЧ-2;
 б – МВСЧ-2 на ОРУ-750 кВ ПС Белый Раст

Таблица 1. Выборочные результаты измерения E на поверхности МВСЧ-2

Номер точки	E , кВ/м	Номер точки	E , кВ/м	Номер точки	E , кВ/м
1	143,9	15	243,1	32	149,6
5	92,1	18	15,0	51	16,0
8	67,8	24	56,0	68	7,2
11	115,2	25	2,8	75	43,2

Эти данные использованы при разработке «Санитарных норм и правил выполнения работ в условиях воздействия переменных электрических полей промышленной частоты (50 Гц)» № 58021 и при разработке концепции единого принципа нормирования электрической и магнитной составляющих ЭМП ПЧ.

Устройство градуировки. Для уменьшения погрешности измерений устройств МВСЧ разработано и изготовлено устройство градуировки «Град-1», с помощью которого проводилась градуировка устройств измерения. Схема градуировочного устройства показана на рис. 17. В табл. 2 приведён протокол градуировки устройства МВСЧ-2. Максимальная погрешность устройства МВСЧ-2 не превышает 5,2 %.

Устройство МВСЧ-4 предназначено для измерения емкостных и аэрионных токов в частях тела человека, проводящего работы под напряжением на воздушных линиях электропередачи СВН и УВН напряжений.

Поверхность МВСЧ-4 разбита на 11 зон измерения (рис. 18) и оснащена автономным блоком питания (АБП), коммутатором (КОМ), измерительным блоком (ИБ), а также блоком приёмопередачи (БПП) цифровой информации по волоконно-оптическим линиям связи (ВОЛС), по которым осуществляется управление процессом измерения и получение результатов измерения на ЭВМ, расположенной на потенциале земли. ВОЛС являются не только линиями связи, но и изолирующим звеном между МВСЧ-4, расположенным на потенциале фазы ВЛ СВН или УВН, и ЭВМ, находящейся на потенциале земли. На каждой измерительной зоне производится 84 измерения за 0,02 с с последующим разложением в гармонический ряд Фурье.

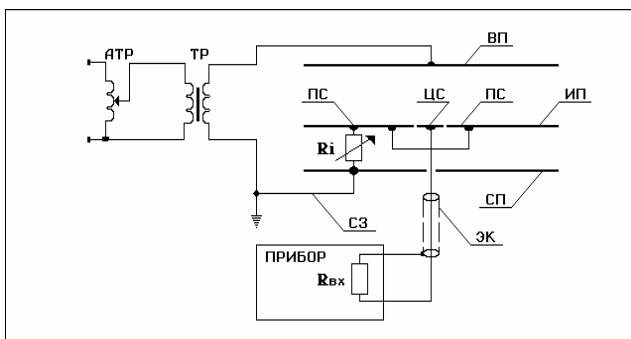


Рис. 17. Схема устройства градуировки измерителей напряжённости электрического поля

Таблица 2. **Протокол градуировки устройства МВСЧ-2**

Номер измерения	Градуировочные значения		Показания устройства	Погрешность
	Ток, нА	E , кВ/м	Ток, нА	%
1	6,79	2,71	6,5	4,2
2	18,22	7,28	18,4	-0,9
3	27,57	11,01	27,6	-0,1
4	51,88	20,73	52,3	-0,8
5	135,97	54,33	140,4	-3,2
6	446,72	178,52	470,0	-5,2
7	904,17	361,34	942,0	-4,1

В табл. 3 приведены результаты измерения емкостных (первая гармоника частотой 50 Гц) и аэрионных (постоянная составляющая тока) токов в частях тела человека (устройства МВСЧ-4), находящегося в зоне ПРН (на фазе) ВЛ 500 кВ без защитных средств и одетого в защитный костюм.

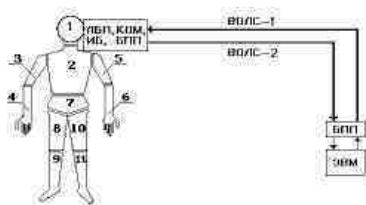


Рис. 18. Расположение измерительных электродов устройства МВСЧ-4 и блок-схема системы измерения

Таблица 3. Результаты измерения емкостных и аэрионных токов с помощью устройства МВСЧ-4

Номер зоны	Аэрионные и емкостные токи в частях тела человека, находящегося на фазе ВЛ 500 кВ без защитного костюма		Аэрионные и емкостные токи в частях тела человека, находящегося на фазе ВЛ 500 кВ в защитном костюме	
	Постоянная составляющая, мкА	Первая гармоника, мкА	Постоянная составляющая, мкА	Первая гармоника, мкА
1	-53,7	242,7	0,8	0,9
2	-88,2	197,5	1,2	4,9
3	14,5	98,7	0,9	0,9
4	167,3	494,3	12,2	35,8
5	21,5	65,1	0,6	0,7
6	-96,1	223,9	1,6	4,7
7	42,7	197,3	1,2	0,6
8	-156,1	185,7	0,5	0,6
9	121,2	949,2	-0,3	4,6
10	21,2	159,2	0,7	0,5
11	-212,5	647,4	4,0	46,9

Величины токов аэрионов на ВЛ 500 кВ в зоне ПРН соизмеримы с амплитудными значениями емкостных токов ПЧ и составляют 15 – 84 %. Применение экранирующего костюма снижает значения токов аэрионов (без учёта зон с незащищёнными участками) в 16 (плечо правой руки) – 294 (бедро правой ноги) раза. Емкостные токи ПЧ по сравнению с токами аэрионов ослабляются более эффективно: в 41 (торс) и 313 (область таза) раз. Представленные результаты подтверждают предположение о наличии в зоне ПРН не только ЭП, характеризующегося емкостными токами (ЕТ), но также аэрионных токов (АТ). Измерения показали высокую эффективность экранирующих комплектов в части защиты работающих как от ЕТ, так и от АТ, что обусловило отсутствие необходимости их дополнительной регламентации при ПРН, требующего обязательного применения экранирующих комплектов.

Устройство МВСЧ-5 предназначено для измерения распределения E ЭП ПЧ в 64 точках по поверхности тела человека, проводящего работы под напряжением на ВЛ СВН и УВН (82 измерения за 0,02 с).

Устройство МВСЧ-6 предназначено для измерения амплитудно-частотного спектра напряжённости ЭП, создаваемого ЭМИ КР в 64 точках на поверхности тела человека, проводящего работы под напряжением на ВЛ СВН и УВН. МВСЧ-6 производит на каждом измерительном электроде 9064 измерения за 0,005 с. Оба устройства связаны с ЭВМ с помощью ВОЛС. В настоящее время оба устройства (МВСЧ-5 и МВСЧ-6) используются для квалификационных испытаний экранирующих комплектов (ЭК) типа Эп-1 и Эп-3 на стендовой базе НИИ медицины труда РАМН, которые проводятся сотрудниками НПО «Техносервис-Электро» и МЭС Центра. МВСЧ-5(6) размещается горизонтально в высоковольтном стенде переменного тока сначала лицом к верхней пластине (ВП) – источнику ЭП, затем спиной. В этих положениях производятся измерения величины емкостного тока, проходящего через тело МВСЧ при различных напряжённостях E неискажённого ЭП между пластинами высоковольтного стенда. Такие измерения тока проводятся для МВСЧ без ЭК (I_1) и одетого в экранирующий комплект (I_2). Коэффициент экранирования ЭК ($K_{ЭК}$) определяется как отношение токов I_1/I_2 . На рис. 19 показан процесс измерения емкостного тока, проходящего через МВСЧ-5, одетого в ЭК. В табл. 4 приведены результаты проверки экранирующих свойств ЭК типа Эп-1 с помощью устройства МВСЧ-5.

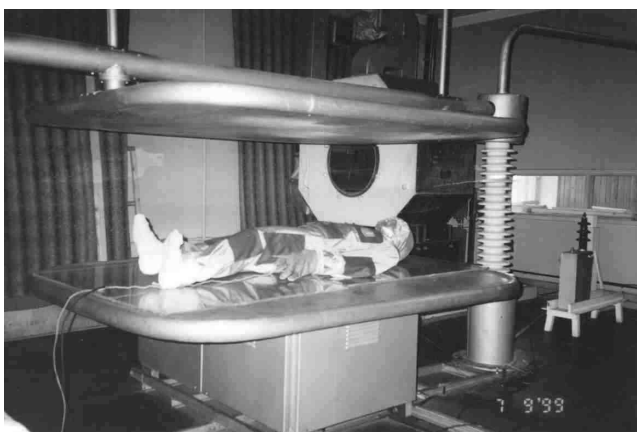


Рис. 19. Измерение емкостного тока, проходящего через МВСЧ-5, одетого в ЭК

Таблица 4. Результаты проверки экранирующих свойств комплекта ЭП-1

E , кВ/м	Эффективность экранирования комплекта ЭП-1 при положении МВСЧ-5 лицом к источнику ЭП			Эффективность экранирования комплекта ЭП-1 при положении МВСЧ-5 спиной к источнику ЭП		
	I_1 , мкА	I_2 , мкА	K_3 , о.е.	I_1 , мкА	I_2 , мкА	K_3 , о.е.
6,25	55,0	0,2	275	65	н.ч.п.*	–
12,50	108	0,4	270	129	н.ч.п.*	–
18,75	160	0,6	267	191	н.ч.п.*	–
25,00	212	0,8	265	258	н.ч.п.*	–
31,25	267	1,0	267	321	н.ч.п.*	–
37,50	319	1,2	266	386	0,1	3860
50,00	425	1,6	266	515	0,1	5150
56,25	480	1,8	267	580	0,1	5800
62,50	542	2,0	271	644	0,2	3220

*н.ч.п. – ниже чувствительности прибора.

Согласно ГОСТ 12.4.172-87 ССБТ. «Комплект индивидуальный экранирующий для защиты от электрических полей промышленной частоты. Общие технические требования и методы контроля» коэффициент экранирования ЭК не должен быть менее 100. Таким образом, квалификационные испытания экранирующего комплекта ЭП-1 показали его высокую эффективность экранирования ЭП ПЧ.

Стенд и устройство измерения напряжённости ЭП, создаваемой ШПС ЭМИ КР постоянного тока на поверхности фантома мышцы. Схемы стенда и устройств измерения показаны на рис. 20: ИЭ – игольчатый электрод, ЗЭ – заземлённый электрод, R_δ – балластный резистор, ЭК – экранированный кабель, УВЧ – усилитель высокой частоты, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ПБП – периферийный блок памяти, УНЧ – усилитель низкой частоты, УСО – устройство сопряжения, П – принтер. Высокочастотный канал позволяет сделать 4096 измерений за 0,005 с. На рис. 21 и 22 показаны результаты измерения вольт-секундных характеристик напряжения на фантоме мышцы при подаче на игольчатый электрод напряжения соответственно +75 кВ и –75 кВ. На рис. 23 и 24 приведены расчётные (по данным рис. 21 и 22 соответственно) кривые амплитудно-частотных спектров (АЧС) напряжённости E , создаваемой на поверхности мышцы ЭМИ КР постоянного тока, полученных в результате разложения в интеграл Фурье с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

При положительной полярности напряжения на ИЭ всплески напряжения, наведенного ЭМИ КР на фантоме мышцы, очень частые, а амплитуды находятся в пределах 200 – 2000 мВ. При отрицательной полярности всплески сравнительно редки, но их амплитуды имеют большие значения: 500 – 8000 мВ.

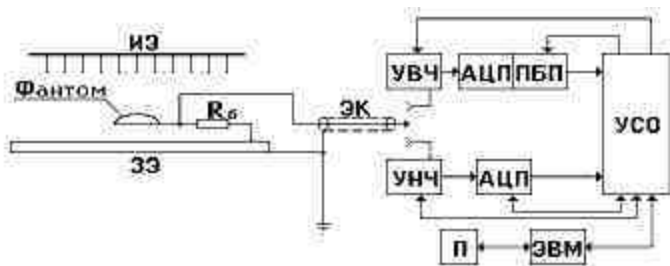


Рис. 20. Стенд и схема измерения электромагнитного излучения коронного разряда

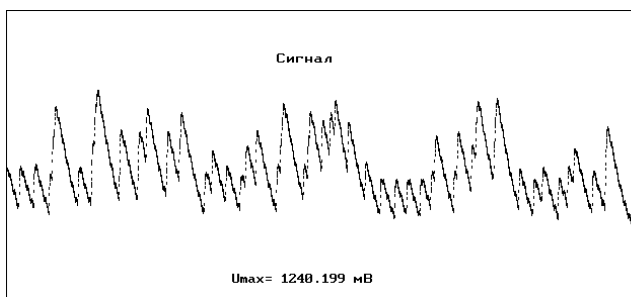


Рис. 21. Вольт-секундная характеристика напряжения, наведенного на фантоме мыши ЭМИ КР постоянного тока при напряжении на ИЭ, равном +75 кВ

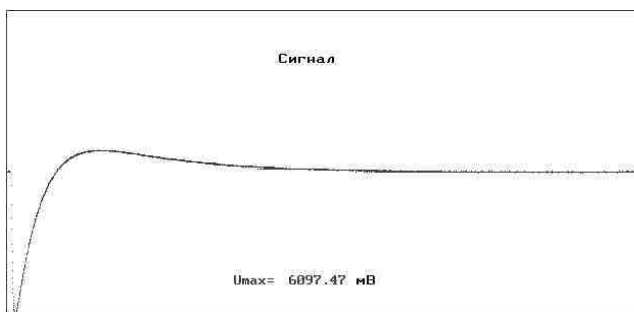


Рис. 22. Вольт-секундная характеристика напряжения, наведенного на фантоме мыши ЭМИ КП постоянного тока при напряжении на ИЭ, равном -75 кВ

Форма кривой АЧС E при положительной полярности сложна, а максимумы амплитуд E достигают значений 10 – 50 В/м на частотах

0,5 – 1 кГц. При отрицательной полярности максимумы амплитуд E достигают значений 50 – 200 В/м на частотах 300 – 800 Гц.

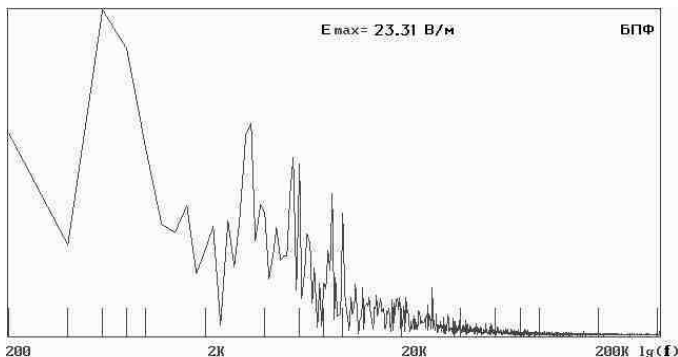


Рис. 23. Амплитудно-частотный спектр напряжённости ЭП на поверхности фантома мыши, наведенного ЭМИ КР постоянного тока при напряжении на ИЭ, равном +75 кВ

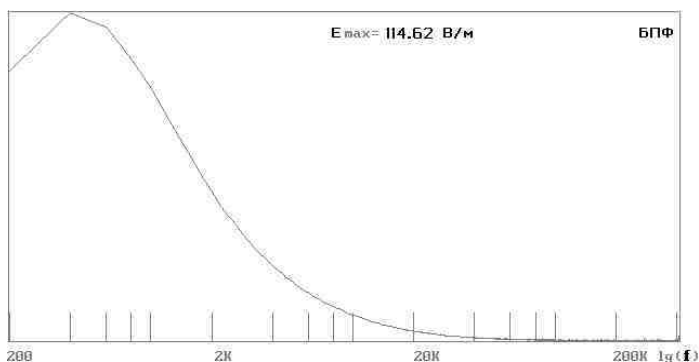


Рис. 24. Амплитудно-частотный спектр напряжённости ЭП на поверхности фантома мыши, наведенного ЭМИ КР постоянного тока при напряжении на ИЭ, равном –75 кВ

Для обеих полярностей амплитуды E затухают при частоте ≥ 100 кГц. Полученные данные свидетельствуют о том, что ЭМИ широкополосного спектра коронного разряда по своим спектральным характеристикам сходны с имеющимися на рабочих местах пользователей ПЭВМ, что требует особого внимания при исключении их неблагоприятного влияния на человека.

УДК 621.315.1

Работа направленных контурных экранов при учете провисания проводов воздушных линий электропередачи

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, А.Ю. Токарский, канд. техн. наук

Рассмотрим работу направленных контурных экранов (НКЭ), размещённых на четырёх пролётах ($M = 4$) длиной $d = 400$ м каждый воздушной линии (ВЛ) 500 кВ. Определенные с учётом провисания в пролёте проводов фаз ВЛ и НКЭ ЭДС \dot{E}_1 и \dot{E}_2 , наведенные в НКЭ1 и НКЭ2, активные сопротивления R_K , собственная $L_{НКЭ}$ и взаимная M_{B3} индуктивности экранов имеют следующие значения: $\dot{E}_1 = 114,4e^{-j108,8^\circ}$ В, $\dot{E}_2 = 114,4e^{j48,8^\circ}$ В, $R = R_K = 0,2842$ Ом, $L = L_{НКЭ1} = L_{НКЭ2} = 4,638 \cdot 10^{-3}$ Гн и $M_{B3} = 1,658 \cdot 10^{-3}$ Гн.

Рассмотрим работу направленных контурных экранов, имеющих параметры, полученные при учёте провисания проводов в пролёте [1, 2].

Работа пассивных направленных контурных экранов. Для двух контурных экранов составим систему уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}(R + j\omega L)\dot{I}_{K1} + j\omega M_{B3}\dot{I}_{K2} &= \dot{E}_1, \\ j\omega M_{B3}\dot{I}_{K1} + (R + j\omega L)\dot{I}_{K2} &= \dot{E}_2.\end{aligned}$$

Подставляя значения R , L , M_{B3} , \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и решая систему уравнений относительно токов, получим

$$\dot{I}_{K1} = 116,9e^{j172,3^\circ} \text{ А} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{K2} = 113,6e^{-j18,7^\circ} \text{ А}.$$

Несимметрия модулей и фазных углов токов в НКЭ1 и НКЭ2 объясняется наличием активных сопротивлений R в цепях экранов. Если решать систему уравнений при условии $R = 0$ Ом, то токи будут симметричны:

$$\dot{I}_{K1}^{R=0} = 120,4e^{j155,4^\circ} \text{ А} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{K2}^{R=0} = 120,4e^{-j35,4^\circ} \text{ А}.$$

На рис. 1 показано распределение напряжённости магнитного поля (МП) в сечении середины пролёта ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли при минимальном габарите «нижний провод фазы – земля», равном 10 м:

- кривая 0 – незранированное МП линии;
- кривая 1 – МП экранировано с помощью НКЭ1 и НКЭ2 с токами i_{K1} и i_{K2} ;
- кривая 2 – МП экранировано с помощью НКЭ1 и НКЭ2 с токами $i_{K1}^{R=0}$ и $i_{K2}^{R=0}$.

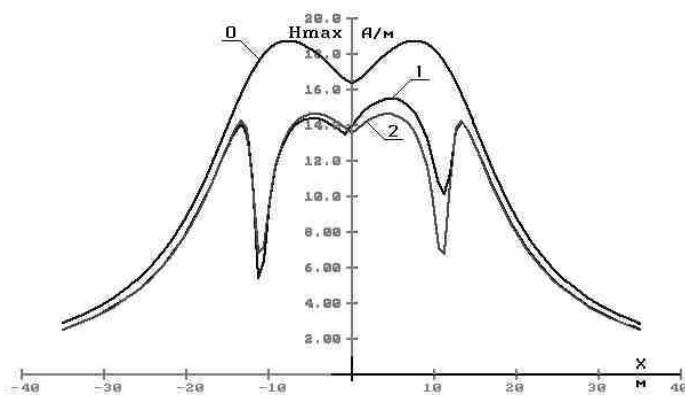


Рис. 1. Распределение напряжённости МП в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли

Использование двух пассивных НКЭ позволяет уменьшить напряжённость МП под линией до значений, меньших 16 А/м. При значениях токов в экранах, равных $i_{K1}^{R=0}$ и $i_{K2}^{R=0}$, значение напряжённости МП становится ниже 15 А/м.

Работа активных направленных контурных экранов. Активный направленный контурный экран отличается от пассивного тем, что в его цепь включается ЭДС, величина которой определяется значением тока, который должен протекать в экране. Зададимся величинами желаемых токов, которые были бы у пассивных НКЭ1 и НКЭ2 при отсутствии в их цепях активных сопротивлений, т.е.

$$i_{K1} = i_{K1}^{R=0} = 120,4e^{j155,4^\circ} \text{ А и } i_{K2} = i_{K2}^{R=0} = 120,4e^{-j34,4^\circ} \text{ А.}$$

Величины суммарных ЭДС

$$\dot{E}_1^\Sigma = \dot{E}_1 + \dot{E}_1' \text{ и } \dot{E}_2^\Sigma = \dot{E}_2 + \dot{E}_2',$$

которые должны находиться в цепях экранов и соответствовать выбранному токам, определяются по выражениям

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^\Sigma &= (R + j\omega L)\dot{I}_{K1} + j\omega M_{B3}\dot{I}_{K2} = 120,4e^{j155,4^\circ} (0,284 + j1,457) + \\ &+ j0,521 \cdot 120,4e^{-j35,4^\circ} = 116,0e^{-j125,8^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_2^\Sigma &= (R + j\omega L)\dot{I}_{K2} + j\omega M_{B3}\dot{I}_{K1} = 120,4e^{-j35,4^\circ} (0,284 + j1,457) + \\ &+ j0,521 \cdot 120,4e^{j155,4^\circ} = 122,7e^{j32,6^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда величины ЭДС, включаемых в цепи НКЭ1 и НКЭ2, будут:

$$\dot{E}'_1 = \dot{E}_1^\Sigma - \dot{E}_1 = 116,0e^{-j125,8^\circ} - 114,4e^{-j108,8^\circ} = 34,1e^{j155,4^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{E}'_2 = \dot{E}_2^\Sigma - \dot{E}_2 = 122,7e^{j32,6^\circ} - 114,4e^{j48,8^\circ} = 34,4e^{-j55,5^\circ} \text{ В.}$$

На рис. 2 показано распределение напряжённости H_{max} на уровне 1,8 м от поверхности земли в сечении ВЛ 500 кВ при токах в НКЭ1 и НКЭ2 со значениями модулей:

- 120 А – кривая 1;
- 130 А – кривая 2;
- 140 А – кривая 3;
- 160 А – кривая 4.

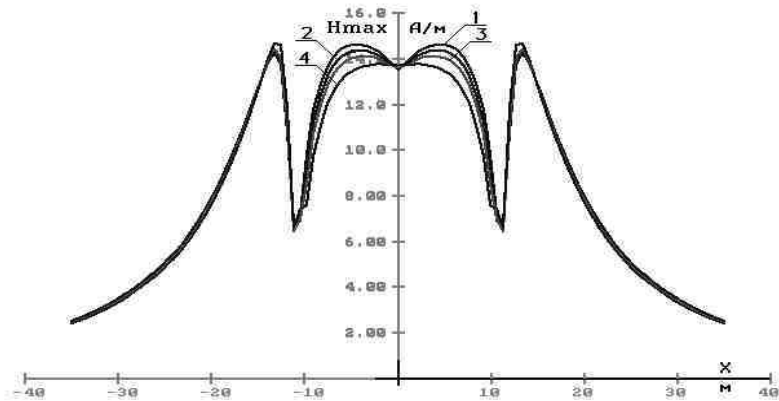


Рис. 2. Распределение напряжённости H_{max} на уровне 1,8 м от поверхности земли в сечении ВЛ 500 кВ при токах с различными значениями модулей в НКЭ1 и НКЭ2

Задаваться большими, чем 120 А, модулями токов в экранах не имеет смысла, т.к. это приводит к уменьшению значений напряжённости МП в центральной зоне под ВЛ, но увеличивает эти значения на крайних пиках.

Аналогично не имеет смысла менять фазный угол у токов \dot{I}_{K1} и \dot{I}_{K2} , т.к. это приводит к нарушению условия «противофазности» напряжённостей магнитных полей, создаваемых ВЛ и экранами, что видно из рис. 3, на котором показано распределение H_{max} на уровне 1,8 м от поверхности земли в сечении ВЛ 500 кВ при токах в НКЭ1 и НКЭ2:

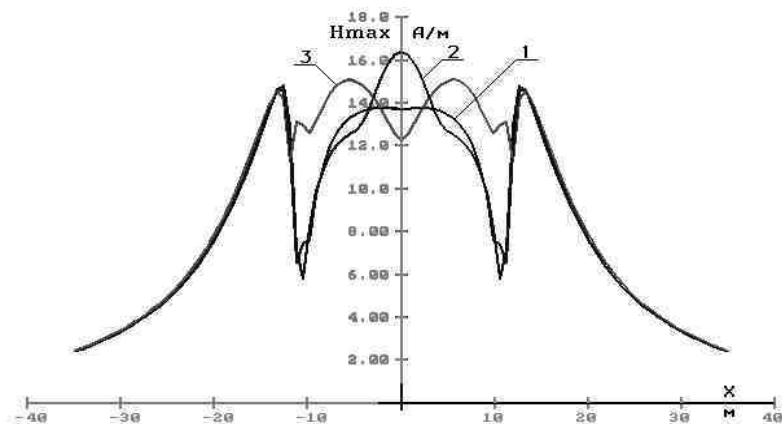


Рис. 3. Распределение H_{max} на уровне 1,8 м от поверхности земли в сечении ВЛ 500 кВ при одинаковых по модулю, но разных по фазному углу токах в НКЭ1 и НКЭ2

- кривая 1 – $\dot{I}_{K1} = 160e^{j155,4^\circ}$ А и $\dot{I}_{K2} = 160e^{-j35,4^\circ}$ А ;
- кривая 2 – $\dot{I}_{K1} = 160e^{j175,4^\circ}$ А и $\dot{I}_{K2} = 160e^{-j55,4^\circ}$ А ;
- кривая 3 – $\dot{I}_{K1} = 160e^{j135,4^\circ}$ А и $\dot{I}_{K2} = 160e^{-j15,4^\circ}$ А .

Изменение фазного угла токов в экранах на $\pm 20^\circ$ приводит к нарушению условия «противофазности» напряжённостей МП, создаваемых токами фаз ВЛ и токами НКЭ в зонах экранирования, что резко снижает эффект уменьшения величин напряжённости поля в этих зонах.

Работа резонансных направленных контурных экранов. Резонансные контурные экраны отличаются от пассивных тем, что в их цепи по-

следовательно включены ёмкости. Это позволяет снизить индуктивное сопротивление экрана и увеличить в нём значение тока.

Для контура НКЭ1 с включённой в его цепь ёмкостью C составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_{K1} \left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) + \dot{I}_{K2} (j\omega M_{B3}) = \dot{E}_1.$$

Задаваясь необходимыми значениями токов в НКЭ1 и НКЭ2 $\dot{I}_{K1} = 120e^{j155^\circ}$ А и $\dot{I}_{K2} = 120e^{-j35^\circ}$ А, подставляя значения R , L , M_{B3} и решая последнее выражение относительно модуля C , получим $|C| = 11350$ мкФ. Используя 11 параллельно соединённых конденсаторов марки КС2-0,22-16-3У3, получим ёмкость величиной 11000 мкФ, которую и включим в цепь каждого экрана. Из системы уравнений для контуров обоих НКЭ

$$\dot{I}_{K1} \left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) + \dot{I}_{K2} (j\omega M_{B3}) = \dot{E}_1,$$

$$\dot{I}_{K2} \left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) + \dot{I}_{K1} (j\omega M_{B3}) = \dot{E}_2;$$

зная R , L , C и M_{B3} , найдём токи в НКЭ1 и НКЭ2:

$$\dot{I}_{K1} = 162,5e^{j178,1^\circ} \text{ А} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{K2} = 156,2e^{-j10,9^\circ} \text{ А}.$$

Как и в предыдущем случае, несимметрия токов в экранах объясняется наличием в цепях НКЭ активных сопротивлений. Если принять $R = 0$ Ом, то, решая последнюю систему уравнений, получим

$$\dot{I}_{K1}^{R=0} = 173,9e^{j154,3^\circ} \text{ А} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{K2}^{R=0} = 173,9e^{-j34,3^\circ} \text{ А}.$$

Для выравнивания модулей токов в НКЭ1 и НКЭ2 в цепь второго экрана можно включить ёмкость меньшей величины $C = 9000$ МкФ (9 параллельно соединённых конденсаторов марки КС2-0,22-16-3У3). Тогда величины модулей токов в НКЭ будут практически одинаковы:

$$\dot{I}'_{K1} = 166,7e^{j178,4^\circ} \text{ А} \quad \text{и} \quad \dot{I}'_{K2} = 166,2e^{-j9,6^\circ} \text{ А}.$$

На рис. 4 показано распределение напряжённостей МП в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли:

- кривая 0 – незэкранированная линия;
- кривая 1 – экранирование МП с помощью резонансных экранов с токами \dot{I}_{K1} и \dot{I}_{K2} ;
- кривая 2 – экранирование МП с помощью резонансных экранов с токами $\dot{I}_{K1}^{R=0}$ и $\dot{I}_{K2}^{R=0}$;
- кривая 3 – экранирование МП с помощью резонансных экранов с токами \dot{I}'_{K1} и \dot{I}'_{K2} .

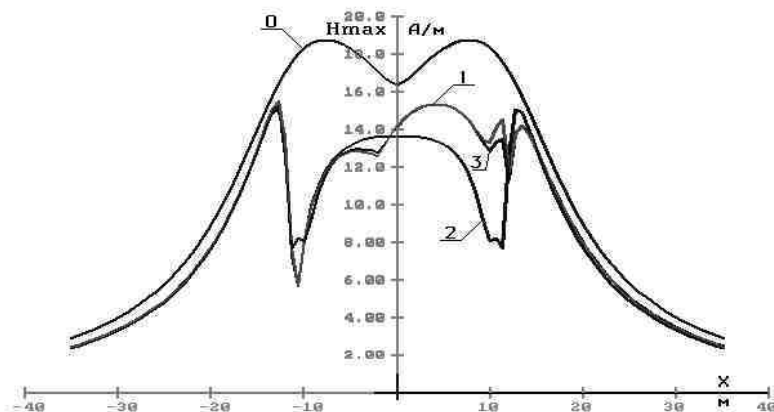


Рис. 4. Распределение напряжённостей МП в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли с экранированием МП с помощью резонансных экранов

На рис. 5 показано распределение напряжённости МП в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для следующих режимов:

- кривая 0 – незэкранированная линия;
- кривая 1 – ВЛ 500 кВ экранирована с помощью пассивных НКЭ;
- кривая 2 – ВЛ 500 кВ экранирована с помощью активных НКЭ;
- кривая 3 – ВЛ 500 кВ экранирована с помощью резонансных НКЭ.

Применение резонансных экранов позволяет снизить величину напряжённости МП до значений, меньших 16 А/м. Несмотря на то, что модули токов активных (рис. 2, кривая 4) и резонансных НКЭ (рис. 4, кри-

вая 2) близки, формы кривых распределения H_{max} для этих режимов экранирования различны, что объясняется сдвигом на 20° по часовой стрелке фазных углов токов резонансного режима вследствие наличия активных сопротивлений в цепях НКЭ этого режима.

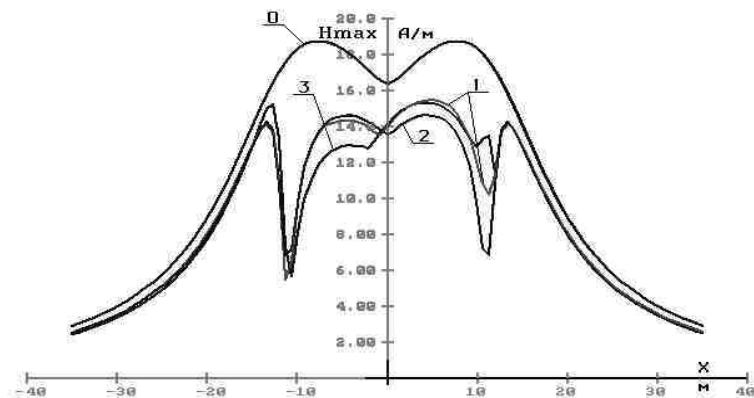


Рис. 5. Распределение напряженности МП в сечении ВЛ 500 кВ на уровне 1,8 м от поверхности земли для различных режимов экранирования МП

Выводы

1. Для рассмотренной конструкции ВЛ 500 кВ пассивные и резонансные экраны имеют одинаковую эффективность экранирования.

2. При применении пассивных НКЭ максимум $H_{max} = 15,5$ А/м достигается при $x \approx 4,5$ м, в то время как резонансные НКЭ создают два одинаковых максимума $H_{max} = 15,3$ А/м при $x \approx -12,5$ м и $x \approx 4,5$ м.

3. Активные НКЭ имеют большую эффективность экранирования МП ВЛ 500 кВ, они создают два центральных максимума $H_{max} = 14,6$ А/м при $x \approx \pm 4,5$ м и два боковых – $H_{max} = 14,3$ А/м при $x \approx \pm 13,5$ м.

Библиографический список

1. **Элементы** теории контурных экранов / В.П. Дикой, А.Ю. Токарский, Н.Б. Рубцова, М.Ш. Мисриханов // Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. – Вып. 4. – Иваново, 2001. – С. 225–254.
2. **Электропередачи** сверхвысокого напряжения ЕЭС России / К.М. Антипов, А.Ю. Токарский, Н.Б. Рубцова, М.Ш. Мисриханов и др. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 484 с.

УДК 621.315.1

Учет провисания проводов в пролете при определении сопротивления направленного контурного экрана

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, А.Ю. Токарский, канд. техн. наук

Для определения величины тока, наведенного в направленном контурном экране (НКЭ) магнитным полем (МП), создаваемым фазными токами воздушной линии (ВЛ) электропередачи, необходимо знать значение сопротивления $Z_K = R_{НКЭ} + j\omega L_{НКЭ}$, при расчёте которого учитывалось бы провисание в пролёте проводов фаз ВЛ и НКЭ.

Определение индуктивного сопротивления НКЭ. Рассмотрим один пролёт НКЭ в середине зоны экранирования МП ВЛ. На рис. 1 схематически показано расположение проводов НКЭ1 в пролёте. Плоскость XOZ сдвинута вниз вдоль оси OY на расстояние f так, чтобы она совпала с нижним проводом НКЭ^H экрана.

Индукция

$$\dot{B}_K^{\Pi H} = \mu_0 \dot{H}_K^{\Pi H} \text{ МП}$$

на расстоянии r_1 в плоскости $ABCD$ НКЭ1, создаваемая током \dot{I}_K нижнего провода экрана, определяется выражением

$$\dot{B}_K^{\Pi H} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{2\pi r_1}.$$

Элементарный магнитный поток, проходящий через элементарную поверхность плоскости $ABCD$ площадью $dS = dr_1$, можно определить по формуле

$$d\Phi^{\Pi H} = \dot{B}_K^{\Pi H} dS = \dot{B}_K^{\Pi H} dr_1,$$

тогда полный магнитный поток, проходящий через рассматриваемую поверхность, будет

$$\Phi^{\Pi H} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K d}{2\pi} \int_{r_0}^b \frac{dr_1}{r_1} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K d}{2\pi} \ln \frac{b}{r_0}, \quad (1)$$

где r_0 – радиус нижнего провода экрана.

В плоскости над дугой AD верхнего провода НКЭ^B экрана комплексное значение перпендикулярного к этой плоскости вектора индукции МП, создаваемого током нижнего провода экрана, определяется по выражению

$$\dot{B}_K^{\cup H} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K y}{2\pi r_2^2}.$$

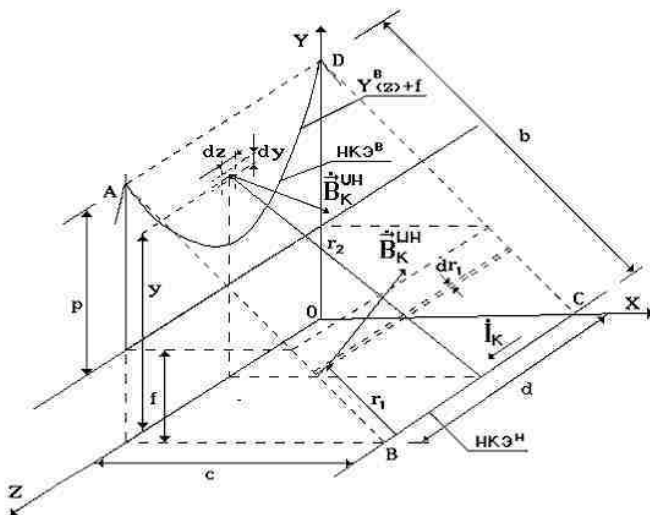


Рис. 1. Расположение проводов НКЭ1 в среднем пролёте зоны экранирования

Элементарный магнитный поток, проходящий сквозь поверхность $dS = dydz$,

$$d\dot{\Phi}^{\cup H} = \dot{B}_K^{\cup} dS = \mu_0 \frac{\dot{I}_K y}{2\pi r_2^2} dydz.$$

С учётом того, что $r_2^2 = y^2 + c^2$, полный магнитный поток, проходящий через рассматриваемую поверхность, определится выражением

$$\dot{\Phi}^{\cup H} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{2\pi} \int_0^d \int_{Y^B(z)+f}^{p+f} \frac{y}{y^2 + c^2} dydz,$$

или

$$\dot{\Phi}^{\cup H} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \int_0^d \left\{ \ln \left[(p+f)^2 + c^2 \right] - \ln \left[(y^B(z)+f)^2 + c^2 \right] \right\} dz. \quad (2)$$

Создаваемый ток в нижнем проводе результирующий магнитный поток, проходящий через плоскости экрана,

$$\dot{\Phi}^H = \dot{\Phi}^{\Pi H} - \dot{\Phi}^{\cup H}. \quad (3)$$

Для определения магнитного потока $\dot{\Phi}^B$, создаваемого током \dot{I}_K в верхнем проводе НКЭ^B экрана, рассмотрим расположение проводов НКЭ1 в криволинейной системе координат. На рис. 2 схематически показано расположение проводов НКЭ1 в криволинейной системе координат. Плоскость *XOZ* опущена на величину *h* так, чтобы она проходила через основания дуги *FG*.

Индукция $\dot{B}_K^{\Pi B}$ МП на расстоянии r_1 в плоскости *EFGH* НКЭ1, создаваемая током \dot{I}_K верхнего провода НКЭ^B экрана, определяется выражением

$$\dot{B}_K^{\Pi B} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{2\pi r_1}.$$

Элементарный магнитный поток, проходящий через элементарную поверхность плоскости *EFGH* площадью $dS = dr_1$, можно определить по формуле

$$d\dot{\Phi}^{\Pi B} = \dot{B}_K^{\Pi B} dS = \dot{B}_K^{\Pi B} dr_1,$$

тогда полный магнитный поток, проходящий через рассматриваемую поверхность,

$$\dot{\Phi}^{\Pi B} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{2\pi} \int_{r_0}^b \frac{dr_1}{r_1} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{2\pi} \ln \frac{b}{r_0}. \quad (4)$$

В плоскости под дугой *FG* нижнего провода НКЭ^H экрана комплексное значение перпендикулярного к этой плоскости вектора индукции МП, создаваемого током верхнего провода экрана, определяется выражением

$$\dot{B}_K^{\cup B} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K (g-y)}{2\pi r_2^2}.$$

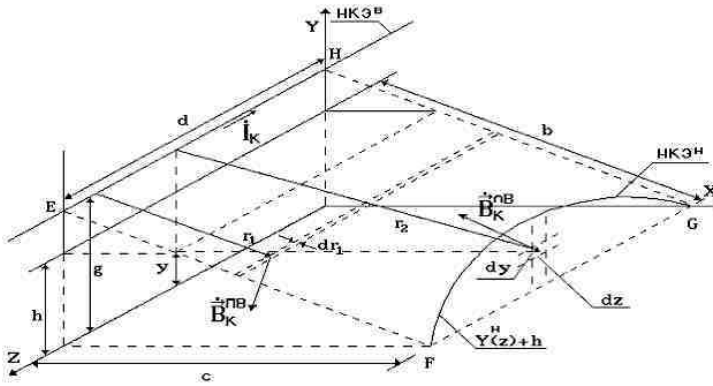


Рис. 2. Расположение проводов НКЭ1 в криволинейной системе координат

Элементарный магнитный поток, проходящий через поверхность $dS = dydz$,

$$d\Phi^{\wedge B} = \dot{B}_K^{\wedge B} dS = \mu_0 \frac{I_K (g - y)}{2\pi r_2^2} dy dz.$$

Поскольку $r_2^2 = (g - y)^2 + c^2$, то полный магнитный поток, проходящий через рассматриваемую поверхность, определится выражением

$$\Phi^{\wedge B} = \mu_0 \frac{I_K}{2\pi} \int_0^d \int_0^{y^H(z)+h} \frac{g - y}{(g - y)^2 + c^2} dy dz,$$

или

$$\Phi^{\wedge B} = \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} \int_0^d \left\{ \ln [g^2 + c^2] - \ln \left[(g - y^H(z) - h)^2 + c^2 \right] \right\} dz. \quad (5)$$

Создаваемый током верхнего провода результирующий магнитный поток, проходящий через плоскости экрана,

$$\Phi^B = \Phi^{PB} - \Phi^{\wedge B}. \quad (6)$$

По выражению (1) найдём Φ^{PB} . Поскольку $p = 15$ м, $f = 5$ м, $c = 11,4$ м, получим

$$b = \sqrt{(p+f)^2 + c^2} = \sqrt{20^2 + 11,4^2} = 23,02 \text{ м.}$$

Тогда

$$\dot{\Phi}^{\Pi H} = \mu_0 \frac{i_K d}{2\pi} \ln \frac{b}{r_0} = i_K 0,601 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Используя выражение (2) и учитывая, что

$$y^B(z) = 10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 7,$$

определим $\dot{\Phi}^{\cup H}$ (здесь и далее нетабличные наружные интегралы берутся численным методом по программе MathCAD):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^{\cup H} &= \mu_0 \frac{i_K}{4\pi} \int_0^d \left\{ \ln [20^2 + 11,4^2] - \ln \left[\left(10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 7 + 5 \right)^2 + 11,4^2 \right] \right\} dz = \\ &= \mu_0 \frac{i_K}{4\pi} \int_0^{400} \left\{ 6,273 - \ln \left[\left(10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 2 \right)^2 + 11,4^2 \right] \right\} dz = \mu_0 \frac{i_K}{4\pi} 274,6. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\dot{\Phi}^{\cup H} = i_K 0,27 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Общий поток МП от нижнего провода согласно выражению (3) составит

$$\dot{\Phi}^H = \dot{\Phi}^{\Pi H} - \dot{\Phi}^{\cup H} = i_K 0,574 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Выражение (4) полностью совпадает с выражением (1), поэтому

$$\dot{\Phi}^{\Pi B} = \dot{\Phi}^{\Pi H} = i_K 0,601 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Так как $g = 20$ м и $h = 17$ м, то по уравнению (5) определим поток $\dot{\Phi}^{\cap B}$ МП, создаваемый током i_K верхнего провода:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}^{\circ B} &= \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \int_0^d \left\{ \ln \left[\left(20 + 10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 5 - 17 \right)^2 + 11,4^2 \right] - \ln [20^2 + 11,4^2] \right\} dz = \\ &= \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \int_0^{400} \left\{ \ln \left[\left(10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 2 \right)^2 + 11,4^2 \right] - 6,273 \right\} dz = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} 274,6,\end{aligned}$$

или

$$\dot{\Phi}^{\circ B} = \dot{\Phi}^{\cup H} = \dot{I}_K 0,27 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

С учётом уравнения (6) найдём суммарный магнитный поток $\dot{\Phi}_{СИ}^C$, создаваемый токами верхнего и нижнего проводов в середине зоны экранирования МП ВЛ и отвечающий за собственную индуктивность НКЭ1:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{СИ}^C &= \dot{\Phi}^H + \dot{\Phi}^B = 2 \dot{I}_K \left(\dot{\Phi}_K^{\Pi H} - \dot{\Phi}_K^{\cup H} \right) = 2 \dot{I}_K \left(\dot{\Phi}_K^{\Pi B} - \dot{\Phi}_K^{\circ B} \right) = \\ &= 2 \dot{I}_K 0,574 \cdot 10^{-3} = \dot{I}_K 1,148 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}\end{aligned}$$

Рассмотрим боковой пролёт зоны экранирования МП ВЛ. Этот пролёт содержит боковой провод НКЭ^В НКЭ1, соединяющий верхний и нижний провода экрана. Боковой провод удобнее устанавливать следующим образом (см. рис. 3): от боковой поддерживающей НКЭ1 гирлянды изоляторов провод НКЭ^В опускается вертикально вниз до уровня расположения нижнего бокового провода НКЭ^{НВ} и далее НКЭ^В укладывается горизонтально перпендикулярно оси ВЛ до перехода в провод НКЭ^{НВ}. Магнитный поток $\dot{\Phi}^{\Sigma \delta}$, создаваемый током \dot{I}_K , протекающим в проводах НКЭ^В и НКЭ^Б, и проходящий через контур бокового пролёта экрана, складывается из потока $\dot{\Phi}^{\delta}$, проходящего через контур *BCFE*, и потока $\dot{\Phi}'^{\delta}$, проходящего сквозь контур *ABCD*.

Напряжённость МП в произвольной точке *G* плоскости *BCFE* НКЭ1 (рис. 3) определяется по выражению

$$\dot{H}_G^{\delta} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi r} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Выразим $\cos \varphi_1$, r и $\cos \varphi_2$ через координаты «*x*» и «*y*»:

$$\cos \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{(d-z)^2 + x^2}}, \quad r = d - z,$$

а поскольку $\varphi_2 = 180^\circ - \alpha$, а $\cos \varphi_2 = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то

$$\cos \varphi_2 = -\cos \alpha = -\frac{c-x}{\sqrt{(d-z)^2 + (c-x)^2}}.$$

Тогда

$$\dot{H}_G^\delta = \frac{I_K}{4\pi(d-z)} \left[\frac{x}{\sqrt{(d-z)^2 + x^2}} + \frac{c-x}{\sqrt{(d-z)^2 + (c-x)^2}} \right].$$

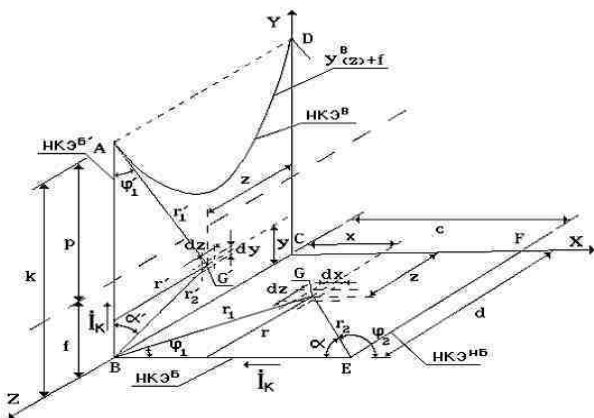


Рис. 3. К определению магнитного потока, проходящего сквозь поверхность бокового пролёта НКЭ1, создаваемого током I_K , протекающим в проводах НКЭ^В и НКЭ^{В'}

Элементарный поток $d\Phi^\delta$, проходящий через элементарную поверхность $dS = dx dz$,

$$d\Phi^\delta = \mu_0 \dot{H}^\delta dx dz.$$

Полный магнитный поток, проходящий через поверхность BCFE, определится выражением

$$\Phi^\delta = \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} \int_0^{d-r_0} \frac{1}{d-z} \int_0^c \left[\frac{x}{\sqrt{(d-z)^2 + x^2}} + \frac{c-x}{\sqrt{(d-z)^2 + (c-x)^2}} \right] dx dz.$$

Найдём внутренний интеграл:

$$J_1 = \int_0^c \left[\frac{x}{\sqrt{(d-z)^2 + x^2}} + \frac{c-x}{\sqrt{(d-z)^2 + (c-x)^2}} \right] dx = 2\sqrt{(d-z)^2 + c^2}.$$

Подставляя $c = 11,4$ м, $r_0 = 0,0126$ м (провод АС-330/43) и $d = 400$ м и беря наружный интеграл, получим

$$\dot{\Phi}^{\delta} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} 147,919 = \dot{I}_K 0,148 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Напряжённость МП в произвольной точке G , расположенной на плоскости $ABCD$ (рис. 3), находится по выражению

$$\dot{H}^{\delta} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi r'} (\cos \varphi' + \cos \alpha').$$

Так как

$$r' = d - z, \quad \cos \varphi' = \frac{k - y}{\sqrt{(d - z)^2 + (k - y)^2}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha' = \frac{y}{\sqrt{(d - z)^2 + y^2}},$$

то напряжённость МП в произвольной точке G , находящейся на плоскости $ABCD$, определится выражением

$$\dot{H}^{\delta} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \frac{1}{d - z'} \left[\frac{k - y}{\sqrt{(d - z')^2 + (k - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(d - z')^2 + y^2}} \right].$$

Найдём магнитный поток $\dot{\Phi}^{\delta}$, проходящий через плоскость $ABCD$ экрана:

$$\dot{\Phi}^{\delta} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \int_{d-r_0}^0 \frac{1}{d - z} \int_0^{y^B(z)+f} \left[\frac{k - y}{\sqrt{(d - z)^2 + (k - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(d - z)^2 + y^2}} \right] dy dz.$$

Возьмём внутренний интеграл

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{y^B(z)+f} \left[\frac{k-y}{\sqrt{(d-z)^2+(k-y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(d-z)^2+y^2}} \right] dy = \\
 &= \sqrt{(d-z)^2 + [y^B(z)+f]^2} - d + z - \\
 &\quad - \sqrt{(d-z)^2 + [y^B(z)+f]^2} + \sqrt{(d-z)^2 + k^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляя значения

$$d = 400 \text{ м}, \quad f = 5 \text{ м}, \quad k = p + f = 15 + 5 = 20 \text{ м} \text{ и} \\
 y^B(z) = 10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 7 \text{ м} \text{ и беря наружный интеграл, получим}$$

значение магнитного потока $\dot{\Phi}^{\delta}$:

$$\dot{\Phi}^{\delta} = \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} 273,452 = I_K 0,273 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Суммарный магнитный поток, создаваемый боковым проводом экрана, проходящий через поверхности бокового пролёта НКЭ1, определяется по выражению

$$\dot{\Phi}^{\Sigma\delta} = \dot{\Phi}^{\delta} + \dot{\Phi}^{\delta'} = I_K (0,148 + 0,273) 10^{-4} = I_K 0,421 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Нижний провод НКЭ^{БН} бокового пролёта НКЭ1 (рис. 4, а) создаёт в произвольно взятой точке G , лежащей на поверхности $BCFE$, напряжённость МП $\dot{H}^{\Pi HB}$, которая определяется по выражению

$$\dot{H}^{\Pi HB} = \frac{I_K}{4\pi r_1} (\cos \varphi_1 + \cos \alpha).$$

Выразим r_1 , $\cos \varphi_1$ и $\cos \alpha$ через координаты x и z :

$$r_1 = c - x, \quad \cos \varphi_1 = \frac{d-z}{a} = \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + (c-x)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{(M-1)d}{b} = \frac{(M-1)d+z}{\sqrt{[(M-1)d+z]^2+(c-x)^2}},$$

где M – число пролётов, занимаемых НКЭ1; $(M-1)d+z$ – расстояние от противоположенного конца провода НКЭ1^H до проекции точки G на ось OZ .

Обозначим $m = (M-1)d+z$, тогда магнитный поток, проходящий через поверхность $BCFE$, определяется по выражению

$$\Phi_{\text{ПНБ}} = \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} \int_d^0 \int_0^{c-r_0} \left\{ \frac{d-z}{(c-x)\sqrt{(d-z)^2+(c-x)^2}} + \frac{m}{(c-x)\sqrt{m^2+(c-x)^2}} \right\} dx dz.$$

Возьмём внутренний интеграл

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{c-r_0} \left\{ \frac{d-z}{(c-x)\sqrt{(d-z)^2+(c-x)^2}} + \frac{m}{(c-x)\sqrt{m^2+(c-x)^2}} \right\} dx = \\ &= \ln \frac{d-z+\sqrt{(d-z)^2+r^2}}{r_0} - \ln \frac{d-z+\sqrt{(d-z)^2+c^2}}{c} + \\ &\quad + \ln \frac{m+\sqrt{m^2+r^2}}{r_0} - \ln \frac{m+\sqrt{m^2+c^2}}{c}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ПНБ}} &= \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} \int_0^d \left[\ln \frac{d-z+\sqrt{(d-z)^2+r_0^2}}{r_0} - \ln \frac{d-z+\sqrt{(d-z)^2+c^2}}{c} \right] dz + \\ &\quad + \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} \int_d^0 \left[\ln \frac{m+\sqrt{m^2+r_0^2}}{r_0} + \ln \frac{m+\sqrt{m^2+c^2}}{c} \right] \cdot dz. \end{aligned}$$

Подставляя значения $d = 400$ м, $c = 11,4$ м, $r_0 = 0,0126$ м и принимая, что $M = 4$, а $m = 1200 + z$, получим

$$\Phi^{HB} = \mu_0 \frac{I_K}{4\pi} 5,435 \cdot 10^3 = I_K 0,544 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Найдём магнитный поток, проходящий через плоскость $ABCD$ под кривой AD (рис. 4). Полная напряжённость \dot{H}^{HB} МП, создаваемая током

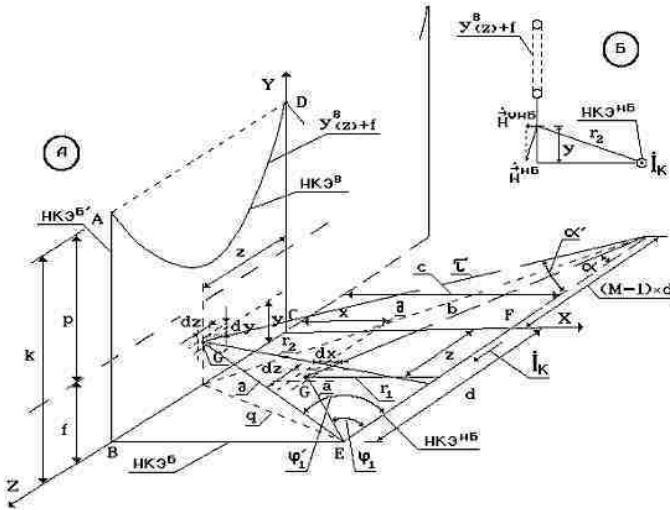


Рис. 4. К определению магнитного потока, проходящего сквозь поверхность бокового пролёта НКЭ1, создаваемого током I_K , протекающим в проводе НКЭНБ

I_K провода НКЭНБ в произвольной точке G (рис. 4, б), находящейся на плоскости $ABCD$, определяется выражением

$$\dot{H}^{HB} = \frac{I_K}{4\pi r_2} [\cos \varphi_1' + \cos \alpha'].$$

Составляющая $\dot{H}^{\circ HB}$ полной напряжённости МП, которая перпендикулярна плоскости $ABCD$, находится по выражению

$$\dot{H}^{\circ HB} = \dot{H}^{HB} \frac{y}{r_2} = \frac{I_K y}{4\pi r_2^2} [\cos \varphi_1' + \cos \alpha'].$$

Выразим r_2 , $\cos\phi_1$ и $\cos\alpha$ через координаты y и z :

$$r_2 = \sqrt{y^2 + c^2}; \quad q = \sqrt{(d-z)^2 + c^2}; \quad \sigma = \sqrt{q^2 + y^2}; \quad \partial = \sqrt{m^2 + c^2};$$

$$\tau = \sqrt{\partial^2 + y^2}; \quad \cos\phi_1' = \frac{d-z}{\sigma} = \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + y^2}};$$

$$\cos\alpha' = \frac{(M-1)d+z}{\tau} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + y^2}}.$$

Тогда

$$\dot{H}^{\cup HB} = \frac{\dot{I}_K y}{4\pi(y^2 + c^2)} \left\{ \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + y^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + y^2}} \right\}.$$

Магнитный поток, проходящий через поверхность $ABCD$ под кривой AD , определяется по выражению

$$\Phi^{\cup HB} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \int_0^d \int_0^{y^B(z)+f} \frac{y}{(y^2 + c^2)} \left\{ \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + y^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + y^2}} \right\} dy dz.$$

Делая подстановку $t = y^2$; $dt = 2y dy$, возьмём внутренний интеграл

$$J = \frac{1}{2} \int_t \frac{1}{(t+c^2)} \left\{ \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + t}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + t}} \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + t} - (d-z)}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + t} + (d-z)} + \ln \frac{\sqrt{m^2 + c^2 + t} - m}{\sqrt{m^2 + c^2 + t} + m} \right\} \Big|_t.$$

Возвращаясь к переменной y , получим

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + y^2} - (d-z)}{\sqrt{(d-z)^2 + c^2 + y^2} + (d-z)} + \ln \frac{\sqrt{m^2 + c^2 + y^2} - m}{\sqrt{m^2 + c^2 + y^2} + m} \right\} \Big|_0^{y^B(z)+f}.$$

Учитывая, что

$$y^B(z) + f = 10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) - 2,$$

$M = 4$, $m = 1200 + z$ м, $d = 400$ м и $c = 11,4$ м и численно беря интеграл по z , получим

$$\dot{\Phi}^{\cup HB} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{24\pi} 557,5 = \dot{I}_K 0,279 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Полный магнитный поток $\dot{\Phi}^{HB}$ от тока \dot{I}_K , протекающего в нижнем боковом проводе НКЭ1^{HB}, проходящий через поверхность бокового пролёта НКЭ1, составит

$$\dot{\Phi}^{HB} = \dot{\Phi}^{\cup HB} + \dot{\Phi}^{\cup HB} = \dot{I}_K (0,544 + 0,028) 10^{-3} = \dot{I}_K 0,572 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Для нахождения магнитных потоков, создаваемых током \dot{I}_K верхнего бокового провода НКЭ1^{BB} и проходящих через сечение бокового пролёта НКЭ1, необходимо перейти к криволинейной системе координат (рис. 5).

Напряжённость $\dot{H}^{\text{ПВВ}}$ МП, создаваемого в произвольной точке плоскости $ABCD$ током \dot{I}_K , протекающим в верхнем проводе НКЭ1^{BB} бокового пролёта НКЭ1, определяется по выражению

$$\dot{H}^{\text{ПВВ}} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi r_1} [\cos \varphi_1 + \cos \alpha].$$

Так как

$$r_1 = g - y; \quad a = \sqrt{(g - y)^2 + (d - z)^2}; \quad b = \sqrt{(g - y)^2 + m^2},$$

то

$$\cos \varphi_1 = \frac{m}{\sqrt{(d - y)^2 + m^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{d - z}{\sqrt{(d - y)^2 + (d - z)^2}}.$$

Тогда

$$\dot{H}^{\text{ПВВ}} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \frac{1}{g - y} \left[\frac{m}{\sqrt{(d - y)^2 + m^2}} + \frac{d - z}{\sqrt{(d - y)^2 + (d - z)^2}} \right].$$

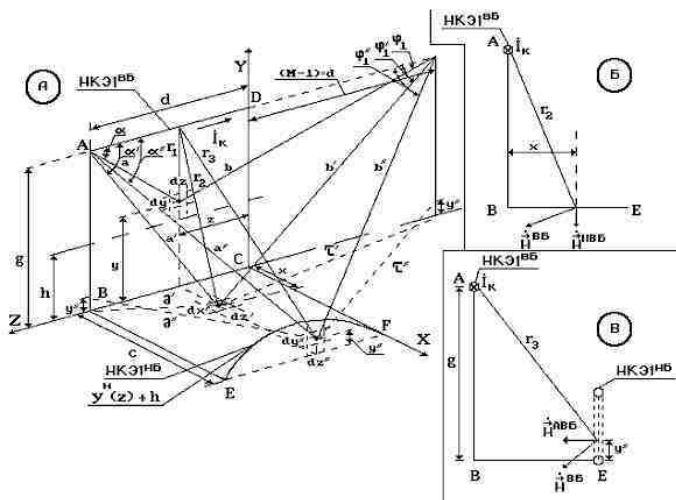


Рис. 5. К определению магнитного потока, проходящего сквозь поверхность бокового пролёта НКЭ1, создаваемого током i_K , протекающим в верхнем боковом проводе НКЭ^{БВ}

Магнитный поток через плоскость $ABCD$ определится выражением

$$\Phi^{ПБВ} = \mu_0 \frac{i_K}{4\pi} \int_0^d \int_0^{g-r_0} \frac{1}{g-y} \left[\frac{m}{\sqrt{(d-y)^2 + m^2}} + \frac{d-z}{\sqrt{(d-y)^2 + (d-z)^2}} \right] dydz.$$

Возьмём внутренний интеграл

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{g-r_0} \frac{1}{g-y} \left[\frac{m}{\sqrt{(d-y)^2 + m^2}} + \frac{d-z}{\sqrt{(d-y)^2 + (d-z)^2}} \right] dy = \\ &= \ln \frac{m + \sqrt{r_0^2 + m^2}}{r_0} - \ln \frac{m + \sqrt{g_0^2 + m^2}}{g} + \\ &+ \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + (d-z)^2}}{r_0} - \ln \frac{\sqrt{g^2 + (d-z)^2}}{g}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $M = 4$, $d = 400$ м и $g = 20$ м и беря наружный интеграл, получим

$$\dot{\Phi}^{ПББ} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} 5,875 \cdot 10^3 = \dot{I}_K 0,588 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Модуль общего вектора напряжённости $\dot{H}^{ББ}$ МП, создаваемого током \dot{I}_K и протекающим в верхнем проводе НКЭ1^{ББ} бокового пролёта НКЭ1, определяется по выражению (рис. 5, а и 5, б)

$$\dot{H}^{ББ} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi r_2} (\cos \varphi_1 + \cos \alpha').$$

Модуль составляющей $\dot{H}^{|ББ}$ общего вектора, перпендикулярной к плоскости $BCFE$, выразим как

$$\dot{H}^{|ББ} = \frac{\dot{I}_K x}{4\pi r_2^2} (\cos \varphi_1 + \cos \alpha').$$

Так как

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \sqrt{x^2 + (d-z)^2}; & a' &= \sqrt{g^2 + x^2 + (d-z)^2}; \\ \tau' &= \sqrt{x^2 + m^2}; & b' &= \sqrt{x^2 + g^2 + m^2} \quad \text{и} \quad r^2 = \sqrt{x^2 + g^2}, \end{aligned}$$

то

$$\cos \varphi_1 = \frac{m}{\sqrt{x^2 + g^2 + m^2}}; \quad \cos \alpha' = \frac{d-z}{\sqrt{x^2 + g^2 + (d-z)^2}}.$$

Тогда

$$\dot{H}^{|ББ} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi} \frac{x}{x^2 + g^2} \left[\frac{m}{\sqrt{x^2 + g^2 + m^2}} + \frac{d-z}{\sqrt{x^2 + g^2 + (d-z)^2}} \right].$$

Магнитный поток $\dot{\Phi}^{|ББ}$, проходящий через поверхность $BCFE$, найдём по выражению

$$\dot{\Phi}^{|ББ} = \frac{\mu_0 \dot{I}_K}{4\pi} \int_0^c \int_0^d \frac{x}{x^2 + g^2} \left[\frac{m}{\sqrt{x^2 + g^2 + m^2}} + \frac{d-z}{\sqrt{x^2 + g^2 + (d-z)^2}} \right] dx dz.$$

Возьмём интеграл по x :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^c \frac{x}{x^2 + g^2} \left[\frac{m}{\sqrt{x^2 + g^2 + m^2}} + \frac{d-z}{\sqrt{x^2 + g^2 + (d-z)^2}} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{c^2 + m^2 + g^2} - m}{\sqrt{c^2 + m^2 + g^2} + m} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{m^2 + g^2} - m}{\sqrt{m^2 + g^2} + m} + \\
 &+ \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{c^2 + g^2 + (d-z)^2} - d + z}{\sqrt{c^2 + g^2 + (d-z)^2} + d - z} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{g^2 + (d-z)^2} - d + z}{\sqrt{g^2 + (d-z)^2} + d - z}.
 \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение $m = 1200 + z$, $M = 4$, $d = 400$ м, $c = 11,4$ м, $g = 20$ м и беря интеграл по z , получим

$$\Phi \Big|_{BB} = \frac{\mu_0 \dot{I}_K}{8\pi} 219,22 = \dot{I}_K 0,11 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Модуль общего вектора напряжённости $\dot{H}^{\Pi BB}$ МП, проходящего через поверхность под кривой EF (рис. 5, а и 5, в), определяется по выражению

$$\dot{H}^{BB} = \frac{\dot{I}_K}{4\pi r_3} (\cos \varphi_1'' + \cos \alpha'').$$

Модуль составляющей $\dot{H}^{\wedge BB}$ общего вектора, перпендикулярной к плоскости под кривой EF , найдём по выражению

$$\dot{H}^{\wedge BB} = \frac{\dot{I}_K (g-y)}{4\pi r_3^2} (\cos \varphi_1'' + \cos \alpha'').$$

Поскольку (см. рис. 5, а)

$$\begin{aligned}
 r_3 &= \sqrt{(g-y)^2 + c^2}; \quad \partial'' = \sqrt{c^2 + (d-z)^2}; \quad \tau'' = \sqrt{m^2 + c^2}; \\
 a'' &= \sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y)^2}; \quad b'' = \sqrt{m^2 + c^2 + (g-y)^2},
 \end{aligned}$$

то

$$\cos \varphi_1'' = \frac{d-z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y)^2}}; \quad \cos \alpha'' = \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y)^2}}.$$

Тогда

$$\dot{H}^{\cap BB} = \frac{I_K}{4\pi} \frac{g-y}{(g-y)^2 + c^2} \left[\frac{d-z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y)^2}} \right].$$

Магнитный поток $\Phi^{\cap BB}$, проходящий через поверхность ниже кривой EF , определим по выражению

$$\begin{aligned} \Phi^{\cap BB} &= \frac{I_K}{4\pi} \int_0^{d-r_0} \int_0^{y^H(z)+h} \frac{g-y}{(g-y)^2 + c^2} \times \\ &\times \left[\frac{d-z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y)^2}} \right] dydz. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по y

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{y^H(z)+h} \frac{g-y}{(g-y)^2 + c^2} \left[\frac{d-z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y)^2}} \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y^H(z)-h)^2} - d+z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2 + (g-y^H(z)-h)^2} + d-z} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{c^2 + (d-z)^2} - d+z}{\sqrt{c^2 + (d-z)^2} + d-z} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y^H(z)-h)^2} - m}{\sqrt{m^2 + c^2 + (g-y^H(z)-h)^2} + m} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{m^2 + c^2 + g^2} - m}{\sqrt{m^2 + c^2 + g^2} + m}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение

$$y^H(z) + h = -10 \operatorname{ch} \left(0,0711 \frac{z-200}{10} \right) + 22,$$

а также значения $c = 11,4$ м, $d = 400$ м, $g = 20$ м, $M = 4$, $m = 1200 + z$ и беря внутренний интеграл по z , получим

$$\dot{\Phi}^{\wedge BB} = \mu_0 \frac{\dot{I}_K}{4\pi} 272,07 = \dot{I}_K 0,272 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Полный магнитный поток $\dot{\Phi}^{BB}$ от тока \dot{I}_K в НКЭ1^{BB}, проходящий через поверхность бокового пролёта НКЭ1, определяется по выражению

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^{BB} &= \dot{\Phi}^{\Pi BB} + \dot{\Phi}^{|BB} - \dot{\Phi}^{\wedge BB} = \dot{I}_K (0,588 + 0,011 - 0,027) 10^{-3} = \\ &= \dot{I}_K 0,572 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.} \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, $\dot{\Phi}^{BB} = \dot{\Phi}^{HB}$.

Полный магнитный поток $\dot{\Phi}_{СИ}^B$, проходящий через поверхность бокового пролёта НКЭ1 и определяющий его собственную индуктивность,

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{СИ}^B &= \dot{\Phi}^{\Sigma\delta} + \dot{\Phi}^{BB} + \dot{\Phi}^{HB} = \dot{\Phi}^{\Sigma\delta} + 2\dot{\Phi}^{HB} = \\ &= \dot{I}_K (0,027 + 2 \cdot 0,572) 10^{-3} = \dot{I}_K 1,171 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.} \end{aligned}$$

При расположении НКЭ1 на M пролётах суммарный магнитный поток, создаваемый током этого же экрана и проходящий через его же сечение, находится по выражению

$$\dot{\Phi}_L = (M - 2) \dot{\Phi}_{СИ}^C + 2\dot{\Phi}_{СИ}^B.$$

Собственная индуктивность НКЭ1 определяется следующим образом:

$$L_{НКЭ1} = \frac{\dot{\Phi}_L}{\dot{I}_K}.$$

Если НКЭ1 располагается на 4 пролётах, т.е. $M = 4$, то его собственная индуктивность составит

$$L_{HKЭ} = L_{HKЭ1} = L_{HKЭ2} = \frac{2\dot{\Phi}^C + 2\dot{\Phi}^B}{i_K} = 4,638 \times 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Индуктивное сопротивление jX_K каждого НКЭ запишется как

$$jX_K = j\omega L_{HKЭ} = 1,457 \text{ Ом.}$$

Определение активного сопротивления НКЭ. Как отмечалось ранее, уравнение оси провисающего в пролёте длиной $d = 400$ м верхнего провода НКЭ имеет вид

$$y^B(z) = 10 \operatorname{ch} \left[0,0711 \frac{z-200}{10} \right] - 7.$$

Длину S этого провода можно определить по выражению

$$S = \int_0^{d=400} \sqrt{1 + \left(\frac{dy^B(z)}{dz} \right)^2} dz = 401 \text{ м.}$$

Если НКЭ размещён на M пролётах ВЛ, то общая длина D его провода с учётом боковых участков поводов k и c (рис. 3) составит

$$D = M(S + d) + 2(k + c).$$

Тогда активное сопротивление всего направленного экрана

$$R_K = R_0 D,$$

где R_0 – погонное сопротивление провода.

Для НКЭ был выбран провод АС-330/43 с $R_0 = 0,087$ Ом/км, тогда, принимая $M = 4$, при $k = 20$ м и $c = 11,4$ м получим

$$R_K = 0,087 \cdot 10^{-3} [4(400 + 401) + 2(20 + 11,4)] = 0,284 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление НКЭ принятой конструкции составит

$$Z_K = R_K + jX_K = 0,284 + j1,457 \text{ Ом.}$$