

Пространственные нелинейные колебания стержня с двумя жесткими заделками

Муницин А.И., канд. техн. наук, Крайнова Л.Н., соиск., Сабанеев Н.А., ст. преп.

Приводится аналитическое решение задачи о вынужденных изгибных колебаниях стержня с двумя заделками, имеющего близкие собственные частоты изгибных колебаний в двух взаимно перпендикулярных плоскостях вследствие близких значений главных осевых моментов инерции поперечного сечения. Учитывается геометрическая нелинейность, обусловленная изменением длины средней линии стержня при его пространственном движении. Исследуются колебания стержня в окрестности главного резонанса.

Ключевые слова: вынужденные колебания, собственные частоты, геометрическая нелинейность, главный резонанс.

Dimensioned Nonlinear Vibrations of Rod with Two Anchorages

A.I. Munitsyn, Candidate of Engineering, L.N. Krainova, Applicant, N.A. Sabaneev, Senior Teacher

The author presents an analytical solution of forced bending vibrations of a rod with two anchorages. The rod has close fundamental frequencies of forced vibrations in two mutually transverse planes due to close values of main axial torques of cross-section inertia. The authors consider geometrical nonlinearity, caused by length changes of the rod central line in its spatial motion. Rod vibrations are researched in the area of the main resonance.

Key words: forced vibrations, fundamental frequencies, geometrical nonlinearity, main resonance.

Пространственные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами и близкими значениями осевых моментов инерции исследованы в [1, 2]. При возбуждении колебаний в плоскости большей изгибной жесткости, в области резонанса обнаружены плоские и пространственные режимы колебаний стержня. При достаточно большом уровне возбуждения максимальные амплитуды реализуются именно на плоской форме колебаний. Этот участок амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) изолирован и реализуется только при наличии внешних возмущений.

Постановка задачи. Пусть центральная ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z . Концам стержня соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Обозначим через v , w перемещения точек средней линии стержня. Пусть на стержень действуют внешние гармонические нагрузки во взаимно перпендикулярных направлениях $q_v^*(x, t)$ и $q_w^*(x, t)$, диссипацию учитываем по моделям внутреннего и внешнего трения. Уравнения пространственных нелинейных колебаний стержня в безразмерных переменных имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \alpha^4 \ddot{v} + v^{IV} + \beta_0 \dot{v}^{IV} + \alpha^4 \sigma_0 \dot{v} - 4\gamma_0 \varepsilon_0 v'' &= \\ = q_v(x) \cos(\mu t + \theta_1), \\ \alpha^4 \ddot{w} + cw^{IV} + c\beta_0 \dot{w}^{IV} + \alpha^4 \sigma_0 \dot{w} - \\ - 4\gamma_0 \varepsilon_0 w'' &= q_w(x) \cos(\mu t + \theta_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^L (v'^2 + w'^2) dx.$$

Все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L . Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени

$$t_* = \omega_0 t.$$

Здесь ω_0 – первая собственная частота изгибных колебаний в плоскости Oxz : $\omega_0 = (\alpha / L)^2 (EJ_y)^{1/2} (\rho F)^{-1/2}$; E и ρ – модуль упругости и плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения; J_y , J_z – моменты инерции сечения; ε_0 – деформация средней линии.

Введем безразмерные параметры:

$$\beta = \beta_* \omega_0, \quad \sigma = \frac{\sigma_*}{\omega_0}, \quad q_v = \frac{q_v^* L^3}{EJ_y}, \quad q_w = \frac{q_w^* L^3}{EJ_y},$$

где β_* и σ_* – коэффициенты в модели внутреннего и внешнего трения.

Последнее уравнение системы (1) получено из условия отсутствия относительного продольного смещения опор. Кручение не учитывается, поскольку в дальнейшем рассматриваются преимущественно изгибные колебания тонкого стержня в окрестности первой собственной частоты.

Система (1) должна быть дополнена граничными условиями, в частности, для стержня с двумя заделками:

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, 1. \quad (2)$$

Метод решения. Ограничимся случаем одномодового приближения и представим решение в виде

$v(x, t) = \varphi_{01}(t)V(x), w(x, t) = \varphi_{02}(t)V(x),$
 где $V(x)$ – первая форма колебаний стержня:
 $V(x) = V_0[(\sin \alpha - sh\alpha)(ch\alpha x - \cos \alpha x) +$
 $+ (ch\alpha - \cos \alpha)(sh\alpha x - \sin \alpha x)],$
 $\alpha = 4,730, V_0 = -0,0109.$

Форма колебаний нормирована из условия, что прогиб в средней точке стержня равен единице. Подстановка в систему (1) и применение процедуры Бубнова–Галеркина приводит к системе с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{01} + \eta_0 \dot{\varphi}_{01} + \varphi_{01} + \gamma(\varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2)\varphi_{01} &= \\ = f_{01} \cos(\mu t + \theta_1), & \\ \ddot{\varphi}_{02} + (\eta_0 + \beta_0(c-1))\dot{\varphi}_{02} + c\varphi_{02} + & \\ + \gamma(\varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2)\varphi_{02} = f_{02} \cos(\mu t + \theta_2), & \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma = 0,240\gamma_0$ для стержня с двумя заделками,
 $\eta_0 = \beta_0 + \sigma_0.$

В уравнениях (3) функции $\varphi_{01}(t), \varphi_{02}(t)$ описывают перемещения средней точки стержня в двух плоскостях, отнесенные к длине стержня L . Выберем в качестве нового масштаба единицы длины амплитуду отклонений $A, A \ll L$. Произведем замену переменных:

$$\varphi_{01} = \varphi_1 \frac{A}{L}, \varphi_{02} = \varphi_2 \frac{A}{L}, f_{01} = f_{11} \frac{A}{L}, f_{02} = f_{12} \frac{A}{L} / \lambda.$$

В новых переменных уравнения (3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \varepsilon\eta\dot{\varphi}_1 + \varphi_1 + \varepsilon\gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_1 &= \\ = \varepsilon f_1 \cos(\mu t + \theta_1), & \\ \ddot{\varphi}_2 + (\varepsilon\eta + \varepsilon^2\beta\delta)\dot{\varphi}_2 + (1 + \varepsilon\delta)\varphi_2 + & \\ + \varepsilon\gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_2 = \varepsilon f_2 \cos(\mu t + \theta_2), & \end{aligned} \quad (4)$$

где введен малый параметр $\varepsilon = \left(\frac{A}{L}\right)^2$ и следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c = 1 + \varepsilon\delta, \varepsilon\eta = \eta_0, \varepsilon\beta = \beta_0, \varepsilon f_1 = f_{11} = f_{01} \frac{L}{A} = \frac{f_{01}}{\varepsilon^{1/2}}, \\ \varepsilon f_2 = f_{12} = f_{02} \frac{L}{A} = \frac{f_{02}}{\varepsilon^{1/2}}. \end{aligned}$$

Амплитуды внешних нагрузок, параметры диссипации и разность собственных частот предполагаются малыми порядка ε , что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики. Отметим, что для стержней $L \gg r$, где r – радиус инерции поперечного сечения $r^2 = J_z / F$, и малость $\varepsilon\gamma$ может быть достигнута выбором величины A . Решение системы уравнений (3) совпадает с решением уравнений (4) при значении $\varepsilon = 1$ или $A = L$. Далее рассматриваются колебания в малой окрестности главного резонанса, т.е. при $\mu = 1 + \varepsilon\lambda, \varepsilon\lambda \ll 1$.

Представим систему (4) в стандартной форме [4] при помощи перехода к медленным переменным:

$$\varphi_k = a_k \cos(\mu t + \alpha_k), \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}_k = -\mu a_k \sin(\mu t + \alpha_k), \quad k = 1, 2,$$

где a_1, a_2 – амплитуды парциальных колебаний; α_1, α_2 – фазовые добавки. При $\varepsilon = 0$ эти величины постоянны и $\mu = 1$. Для значений $\varepsilon > 0$ медленные переменные изменяются со скоростью ε . Произведя подстановку (5) в уравнения (4) и применяя метод усреднения, получим систему уравнений в медленных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k = \frac{1}{2} \varepsilon f_k \sin(\alpha_k - \theta_k) + \\ + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_1^k a_2^{3-k} \sin 2(\alpha_k - \alpha_{3-k}) - \frac{1}{2} \varepsilon \eta a_k, \\ \dot{\alpha}_k = \frac{1}{2} \varepsilon [\delta(k-1) - 2\lambda] - \\ - \frac{1}{2a_k} \varepsilon f_k \cos(\alpha_k + \theta_k) + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_k^2 + \\ + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_{3-k}^2 (2 + \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2)), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Слагаемые $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (6) опущены. Далее будем рассматривать установившиеся вынужденные колебания стержня, что соответствует нулевому левым частям уравнений (6). Для численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений воспользуемся методом продолжения решения по параметру. Если при некотором значении λ^k известно приближенное решение системы уравнений $r = (a_1^k, a_2^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k)^T$, то для значения $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$ приближенное решение представляется в виде $r^{k+1} = r^k + \Delta r^k$. Подставляя в систему (6) и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных из системы

$$G^k \Delta r^k = p^k + R^k, \quad (7)$$

где R^k – вектор невязки на предыдущем шаге решения; $p^k = (0, 0, \lambda^k, \lambda^k)^T$.

Знак действительной части всех собственных значений матрицы G позволяет сделать вывод об устойчивости решения. Поскольку матрица несимметрична, для решения проблемы собственных значений использовался QR-алгоритм.

Результаты численного моделирования. В качестве примера рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях латунной трубы длиной 1м, жестко закрепленной по краям. Внешний диаметр трубы $d = 16$ мм, внутренний – $d_0 = 14$ мм. Радиус инерции сечения

$$r = \frac{J_z}{F} = \frac{d}{4} \sqrt{1 + \frac{d_0^2}{d^2}} = 5,3 \text{ мм}, \quad \text{параметр}$$

нелинейности $\gamma = 0,24 \left(\frac{L}{2r}\right)^2 = 2125$. Параметр диссипации в системе уравнений (3) при-

нимался равным $\eta_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, параметр неравножесткости $c = 1,012$. Значение параметра диссипации определено по результатам экспериментальных исследований свободных колебаний. Возбуждение колебаний производилось электромагнитным вибровозбудителем, регистрация колебаний – датчиком виброускорений.

На рис. 1, 2 приведены амплитудно-частотные характеристики $a_2(\mu), a_1(\mu)$ для четырех значений амплитуды обобщенной силы f_{02} , входящей в систему уравнений (3): $f_{02} = 3,2 \cdot 10^{-6}$ (кривая 1); $f_{02} = 8 \cdot 10^{-6}$ (кривая 2); $f_{02} = 2,08 \cdot 10^{-5}$ (кривые 3); $f_{02} = 3,2 \cdot 10^{-5}$ (кривые 4). Устойчивые решения показаны жирными линиями. Кривая 1 соответствует малым значениям амплитуды возбуждения, колебания трубы в двух плоскостях происходят независимо друг от друга. АЧХ практически совпадают с результатами, полученными по линейной теории. С увеличением амплитуды возбуждения (кривая 2) получаем две независимые нелинейные амплитудно-частотные характеристики $a_1(\mu)$ и $a_2(\mu)$. С увеличением амплитуды возбуждения колебаний (кривые 3) происходит качественное изменение АЧХ. В области резонанса взаимодействие между формами колебаний приводит к существованию пространственных режимов движения стержня. На амплитудно-частотных характеристиках четвертого случая нагружения (кривые 4) присутствуют все возможные режимы колебаний в области резонанса: два пространственных, с вращением в противоположные стороны и почти плоское движение в плоскости большей изгибной жесткости стержня. Для неравножесткого стержня при определенных значениях параметров задачи одновременно существуют несколько режимов колебаний.

Две пространственные формы движения отличаются направлением вращения сечений, причем одна из них реализуется на изолированном участке АЧХ. Максимальные амплитуды реализуются на колебаниях, имеющих форму эллипса, сильно вытянутого вдоль оси z , т. е. при дви-

жении практически в плоскости большей изгибной жесткости сечения стержня.

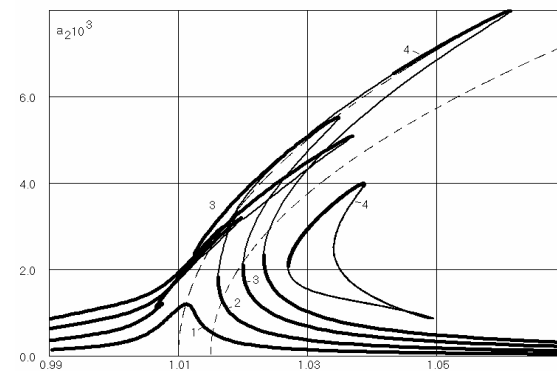


Рис. 1. АЧХ стержня в плоскости возбуждения колебаний

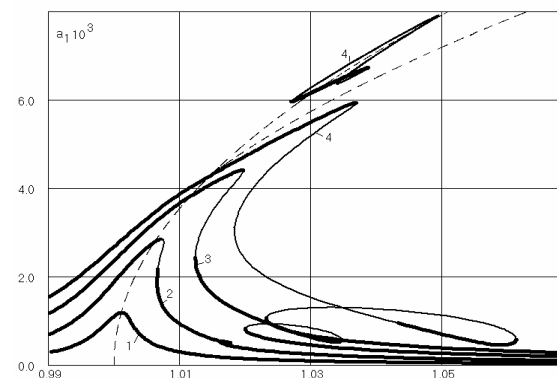


Рис. 2. АЧХ стержня в плоскости, ортогональной возбуждению колебаний

Список литературы

1. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 72–80.
2. Муницын А.И. Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 3. – С. 427–438.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.

Муницын Александр Иванович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон 8-910-667-11-48,
e-mail: munitsyn@rambler.ru

Крайнова Лариса Николаевна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон 8-910-981-68-57.

Сабанеев Николай Андреевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон 8-910-981-68-57.