© «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 2010 г.

УДК 681.3

Обобщенная задача Коши и пути регуляризации некорректных задач

Ясинский Ф.Н., д-р физ.-мат. наук, Ясинский И.Ф., канд. техн. наук

Рассматривается задача Коши, предлагается способ решения некорректной задачи с использованием методов регуляризации.

Ключевые слова: задача Коши, некорректная задача, регуляризация, глобальный поиск.

Generalized Koshi Case and the Ways of Incorrect Tasks Regularization

F.N. Yasinskiy, Doctor of Physics and Mathematics, I.F. Yasinskiy, Candidate of Physics and Mathematics

The case of Koshi is considered. Solution to incorrect task is presented by means of the regularization method.

Keywords: the case of Koshi, incorrect task, regularization, global search.

Как известно, задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) ставится следующим образом.

Имеется система ОДУ

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(t, x_1, ..., x_N\right); \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

к которой присоединены начальные условия

$$x_i\big|_{t=t^0} = x_i^0 . \tag{2}$$

Нужно найти функции $x_i\,(t)$ = ? при $t > t^0$. Здесь $x_i\,(t)$ – искомые переменные; t – время; t^0 – его начальное значение; $F_i\,(t, x_1, \ldots, x_N)$ – известные функции, называемые правыми частями; x_i^0 – заданные значения всех переменных в начальный момент; N – размерность задачи.

Все переменные $x_i\,(t)$ – наблюдаемые, начиная с начального момента t^0 и далее.

Для решения этой задачи разработаны прекрасные аналитические и численные методы. Однако их применение существенно ограничивается в ряде приложений тем, что часть переменных может быть не наблюдаема, включая их начальные значения.

Поясним это следующим примером.

В 1998 г. академиком РАН В.П. Мясниковым перед нашей исследовательской группой была поставлена такая задача: со спутников ведется наблюдение за течениями на поверхности океана. Опираясь на уравнения гидродинамики, после достаточно длительного наблюдения за поверхностными течениями нужно восстановить величину и направления скоростей в глубине океана.

При этом предполагалось, что можно ограничиться трехмерными уравнениями Рейнольдса в следующем виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + F_i , \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 , \tag{4}$$

где u_i – искомые составляющие скорости, i = 1, 2, 3; P – давление; ρ – плотность; x_i – декартовы координаты; ν – кинематическая турбулентная вязкость; вычисляемая с помощью K-E-модели турбулентности; F_i – кориолисово ускорение, вызванное вращением Земли.

Поверхность воды и океана предполагаются плоскими.

Очевидно, что данная задача относится к числу некорректных и может быть решена лишь при условии применения методов регуляризации. Кроме того, начальные скорости для глубинных течений неизвестны. Возвращаясь снова от уравнений в частных производных (3), (4) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (1), (2), что не меняет существа дела, сформулируем обобщенную или расширенную задачу Коши.

Задана система ОДУ (1). При этом переменные $x_i(t), \ldots, x_N(t)$ делятся на наблюдаемые и скрытые:

- наблюдаемые

$$x_1, \;...,\; x_n ; \tag{5}$$

- скрытые

$$x_{n+1}, \;...,\; x_N ; \tag{6}$$

- их начальные значения

$$x_1^0, \;...,\; x_n^0 \;\text{ и }\; x_{n+1}^0, \;...,\; x_N^0 .$$

Скрытые переменные для удобства переобозначим:

$$x_{n+1} = \alpha_1, \quad x_{n+2} = \alpha_2, ..., \; x_N = \alpha_m . \tag{7}$$

Соответственно, $\alpha_1^0, \;...,\; \alpha_m^0$ – их начальные значения.

К уравнениям (1) вместо начальных $m = N - n$ значений (2) скрытых переменных присоединяются значения наблюдаемых переменных $x_\ell\left(t^k\right) = x_\ell^k$, l = 1, 2, …, n в моменты времени t^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, M$. При этом, чтобы решение было однозначно определенным, необходимо, чтобы $M \geq \dfrac{N}{n}$. Нужно определить начальные значения скрытых переменных и затем найти все $x_i(t) = ?$ расширенной задачи Коши.

Решение может быть построено следующим образом. Назначаются начальные значения для скрытых переменных $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0$ и заданные известные начальные значения для наблюдаемых переменных $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Система (1) интегрируется каким-либо подходящим аналитическим или численным методом, например:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = F_i\left(t, x_1, \tilde{x}_N\right); \quad i = 1, 2, \ldots, N$$
$$\tilde{x}_i\big|_{t=t^0} = x_i^0; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (8)$$
$$\tilde{x}_{n+j}\big|_{t=t^0} = \alpha_i^0; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

В этих уравнениях тильдой отмечены получающиеся при этом решения, возможно отличающиеся от действительных. Для указанных фиксированных моментов t^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, M$ находятся невязки между вычислительными $\tilde{x}_l\left(t^k\right)$ и заданными наблюдаемыми значениями x_i^k:

$$H_l^k = x_l^k - \tilde{x}\left(t^k\right), \qquad (9)$$

из которых строится, например, квадратичная мера близости полученного решения $\tilde{x}_l$ к действительному движению данной динамической системы по наблюдаемым переменным:

$$Q = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{M}\left|x_l^k - \tilde{x}_l\left(t^k\right)\right|^2. \qquad (10)$$

Эта мера, очевидно, является функцией от принятых начальных значений скрытых переменных $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0$:

$$Q = Q\left(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0\right).$$

Минимизируя эту меру по $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0$, можно найти начальные значения скрытых переменных $\hat{\alpha}_1^0, \ldots, \hat{\alpha}_m^0$, обеспечивающих наилучшее приближение по наблюдаемым переменным:

$$Q\left(\hat{\alpha}_1^0, \ldots, \hat{\alpha}_m^0\right) = \min_{\left(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0\right)} Q\left(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0\right), \qquad (11)$$

и затем продолжить интегрирование системы (1) обычным образом на продолженном отрезке времени $t > t^M$.

К сожалению, целевая функция $Q\left(\hat{\alpha}_1^0, \ldots, \hat{\alpha}_m^0\right)$ часто оказывается многоэкстремальной и не отличается гладкостью. Поэтому приходится искать глобальный минимум на множестве локальных. Наилучшими инструментами в этом случае оказываются наши варианты случайного поиска [1], стохастического тяжелого шарика [2] и генетического поиска [3], [4]. Все они допускают распараллеливание и могут быть реализованы на многопроцессорных компьютерах.

Эта методика была успешно применена к указанной выше задаче о скрытых течениях в океане, а также к задачам о восстановлении размытых диффузией изображений и искаженных сигналов. При этом результаты были лучше, чем при традиционных методах регуляризации.

В заключение сделаем два замечания.

1. Кроме квадратичной меры близости (10) можно использовать иные меры. Например, вместо квадрата взять сумму абсолютных значений невязок или использовать более высокие четные степени. Стохастические методы минимизации легко справляются с этими усложнениями, которые непреодолимы при классическом подходе.

2. Указанная методика позволяет соединить динамическое прогнозирование с нейросетевым. Прогнозирование процессов с помощью нейронных сетей также основывается на результатах длительного наблюдения за поведением открытых переменных. При этом значениями скрытых переменных не интересуются. Эффективность комбинированного метода и области его приложения могут быть весьма велики.

Список литературы

1. **Ясинский И.Ф.** Усовершенствованный случайный поиск // Вестник ИГЭУ. – 2004. – № 3. – С. 47–48.

2. **Ясинский И.Ф.** Синтетический алгоритм оптимизации и настройки нейронных сетей // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007. – № 3. – С. 119–123.

3. **Сидоров С.Г., Ясинский И.Ф., Ясинский Ф.Н.** Генетический алгоритм поиска глобального минимума // Вестник ИГЭУ. – 2007. – №4. – С. 24–26.

4. **Сидоров С.Г., Ясинский И.Ф., Ясинский Ф.Н.** Реализация генетического алгоритма поиска глобального минимума на многопроцессорном кластере: Сб. мат-лов междунар. конф. «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». – Владимир: ВГУ, 2009. – С. 348–351.

Ясинский Федор Николаевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высокопроизводительных вычислительных систем,
телефон (4932) 26-98-29.

Ясинский Игорь Федорович,
Ивановская государственная текстильная академия,
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий,
e-mail: igor2266@yandex.ru