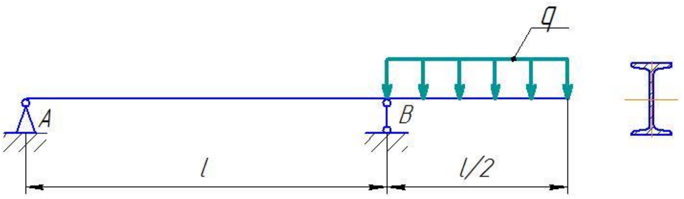
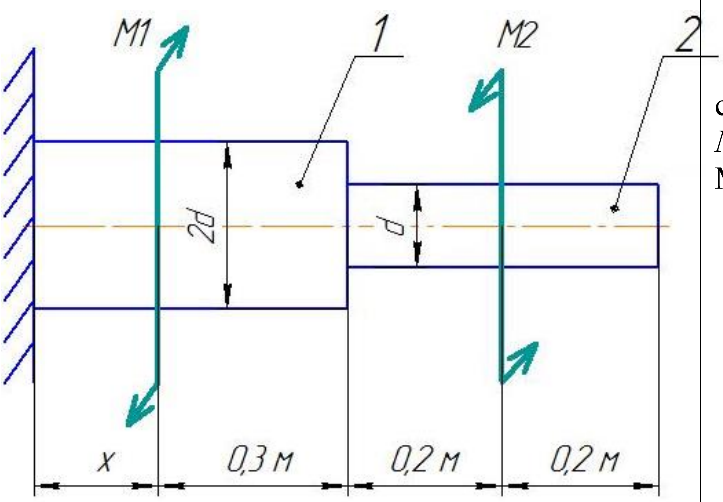
II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов посвященного 100-летию образования кафедры «Теоретическая и прикладная механика» ИГЭУ



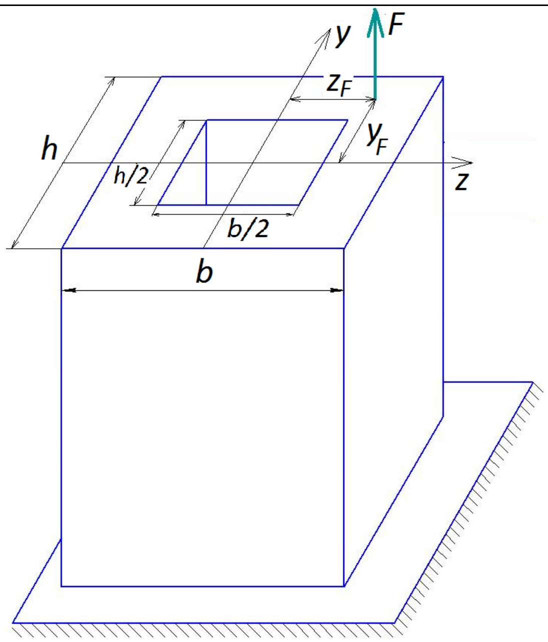
Задача №1

Определить величину q если l=4м, z_{max}=0,011м, двутавр №20.
z_{max} – величина максимального прогиба в пролете AB.



Задача №2

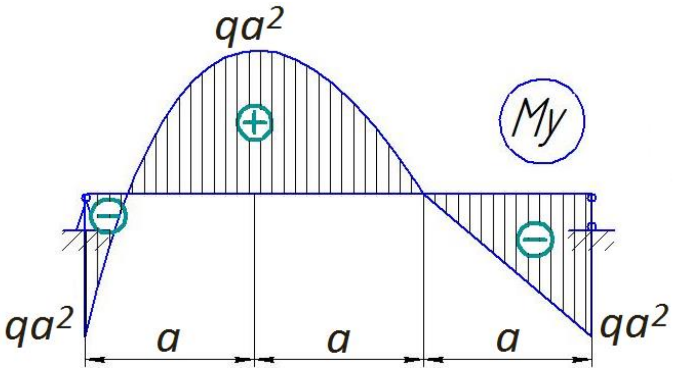
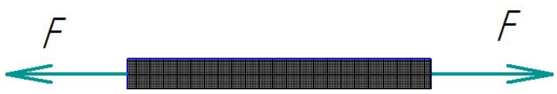
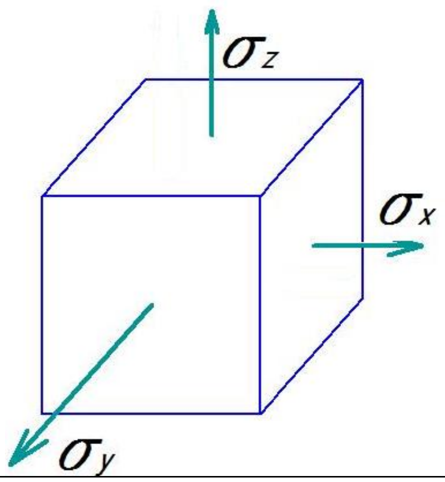
При каком значении x угол поворота свободного конца вала равно нулю. Если M_1=300кНм, M_2=75кНм, d=10см. Материал сталь.



Задача №3

Определите координаты точки приложения силы.
Дано:
На прямой стержень прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ действует продольная сила F, приложенная внецентренно.
Уравнение нейтральной линии:

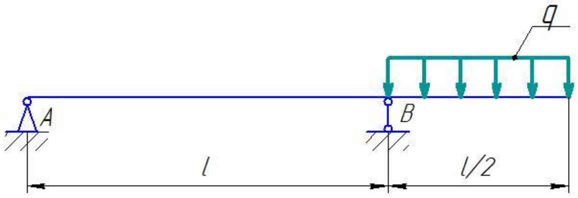
$$\frac{1}{3}+\frac{4y}{5h}+\frac{4z}{5b}=0.$$

	***Задача №4*** Для однопролетной балки по заданной эпюре изгибающих моментов построить эпюру поперечных сил и определить нагрузку, действующую на балку.
	***Задача №5*** Дано: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $F = 125$ кН. Сечение квадрат со стороной $a = 0{,}015$ м. Определить коэффициент Пуассона, если при растяжении стержня размер *a* уменьшится на *0,01 мм*.
	***Задача №6*** Найти соотношение между σ_x, σ_y, σ_z, при котором возникает одноосная деформация в данном элементе.

Иваново 2018

II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 1



Определить величину q если l=4м, z_{max}=0,011м, двутавр №20.
z_{max} величина максимального прогиба в пролете AB.

Решение:

Определить величину q, если l = 4 м; $z_{\max} = 0{,}011$м; двутавр №20.
$Z_{\max}$ – величина максимального прогиба в пролёте AB.

$$\Sigma M_B = 0\,; \quad R_A l - \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4} = 0\,; \quad R_A = \frac{ql}{8}.$$

Записываем дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJ_x z'' = -\frac{ql}{8}\cdot x \quad \text{на участке} \quad 0 \le x \le l\,.$$

Интегрируем дважды

$$EJ_x z' = -\frac{ql}{8}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1\,; \qquad EJ_x z = -\frac{ql}{8}\cdot\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\,.$$

Начальные условия при $x = 0;\ z = 0;\ \to C_2 = 0$,

$$x = l;\ z = 0;\ \to C_1 = \frac{ql^3}{48}\,,$$

$$EJ_x z' = -\frac{ql}{16}\cdot x^2 + \frac{ql^3}{48}\ ; \qquad EJ_x z = -\frac{ql\cdot x^3}{48} + \frac{ql^3}{48}\cdot x$$

Максимальный прогиб получается в сечении, угол поворота которого равен нулю.

$$-\frac{ql}{16}\cdot x^2 + \frac{ql^3}{48} = 0\,; \qquad -x^2 + \frac{l}{3} = 0\,; \qquad x = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot l = 0{,}577\,l\,.$$

Подставляем x в уравнение упругой линии. Получаем

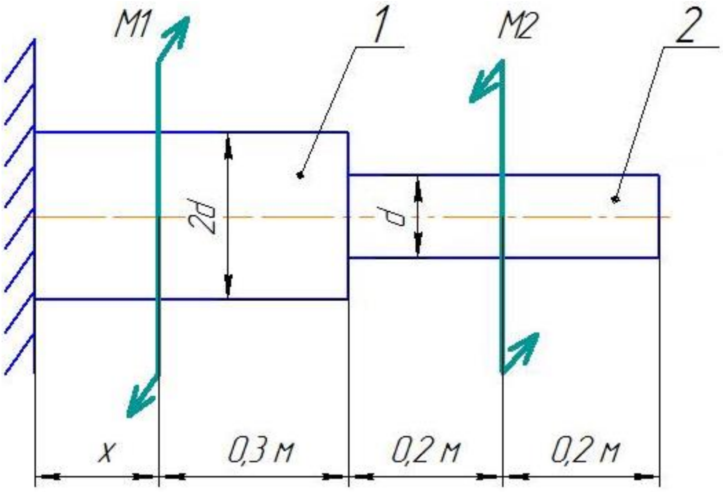
$$EJ_x z_{\max} = -\frac{ql}{48}\cdot x^3 + \frac{ql^3}{48}\cdot x$$

$$q = \frac{EJ_x z_{\max}\cdot 48}{-l\cdot x^3 + l^3\cdot x} = \frac{2\cdot 10^{11}\cdot 1840\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}011\cdot 48}{-4\cdot(0{,}577\cdot 4)^3 + 4^3(0{,}577\cdot 4)} = \frac{1943{,}04\cdot 10^3}{98{,}534} = 19{,}72\cdot 10^3 \approx 20 \text{ кН/м}$$

Ответ: $q = 19{,}72\cdot 10^3 \approx 20$ кН/м.

II тур Всероссийской студенческой олимпиады
Цетрального и Приволжского федеральных округов
по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 2



При каком значении x угол поворота свободного конца вала равно нулю, если M_1=300кНм, M_2=75кНм, d=10см ?
Материал – сталь.

Решение:

$$\varphi_A = \frac{M_2 \cdot 0{,}2}{GJ_\rho} + \frac{M_2 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{3}{2}}{16GJ_\rho} + \frac{M_2 x}{16GJ_\rho} - \frac{M_1 x}{16GJ_\rho} = 0$$

$$16M_2 \cdot 0{,}2 + 1{,}5M_2 \cdot 0{,}3 + M_2 x - M_1 x = 0$$

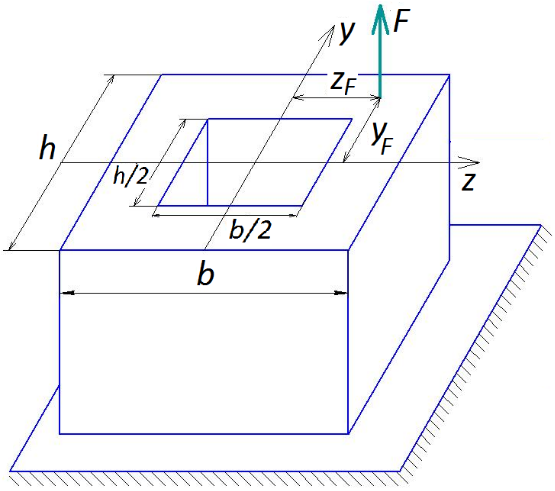
$$x(M_1 - M_2) = 17{,}5M_2 l$$

$$x = \frac{17{,}5M_2}{M_1 - M_2} l = \frac{17{,}5 \cdot 75}{300 - 75} l = \frac{17{,}5}{3} l \cong 5{,}833l \cong 1{,}1667 \text{ м}$$

Ответ : $x \cong 1{,}1667$ м.

II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 3



Определите координаты точки приложения силы.

<u>Дано:</u> На прямой стержень прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ действует продольная сила F, приложенная внецентренно.

Уравнение нейтральной линии:

$$\frac{1}{3}+\frac{4y}{5h}+\frac{4z}{5b}=0.$$

<u>Решение:</u>

Нормальные напряжения при внецентренном растяжении

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{J_z}\cdot y+\frac{M_y}{J_y}\cdot z=\frac{F}{A}+\frac{F\cdot y_F}{J_z}\cdot y+\frac{F\cdot z_F}{J_y}\cdot z,$$

где z_F и y_F – координаты точки приложения силы F из условия $\sigma=0$ находим положение нейтральной линии:

$$0=\frac{F}{A}+\frac{F\cdot y_F}{J_z}\cdot y+\frac{F\cdot z_F}{J_y}\cdot z. \qquad A=b\cdot h-\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{3}{4}bh$$

$$J_z=\frac{bh^3}{12}-\frac{b}{2}\cdot\frac{h^3}{2^3\cdot 12}=\frac{15bh^3}{192}=\frac{5}{64}bh^3$$

$$J_y=\frac{b^3h}{12}-\frac{b^3}{2^3}\cdot\frac{h}{2\cdot 12}=\frac{5}{64}b^3h$$

$$\frac{4F}{3bh}+\frac{F\cdot y_F\cdot 64}{5bh^3}\cdot y+\frac{F\cdot z_F\cdot 64}{5b^3h}\cdot z=0; \qquad \frac{4}{3}+\frac{64y_F}{5h^2}\cdot y+\frac{64z_F}{5b^2}\cdot z=0.$$

$$\frac{1}{3}+\frac{16y_F}{5h^2}\cdot y+\frac{16z_F}{5b^2}\cdot z=0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4y}{5h}+\frac{4z}{5b}=0 \qquad (2).$$

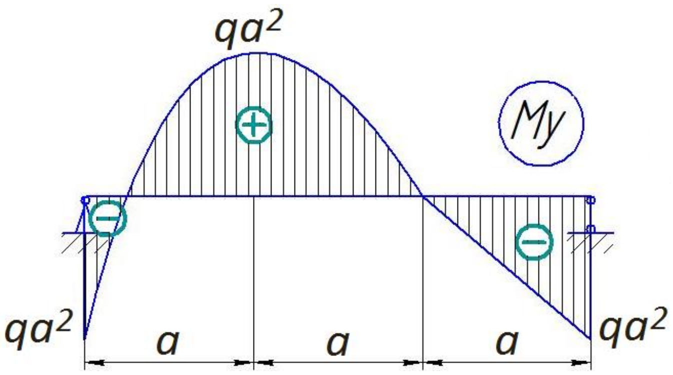
Из (2) найдём координаты точек пересечения нулевой линии с осями координат $A_i(Z_i;Y_i)$:

$A_1\left(-\frac{5b}{12};0\right)$, $A_2\left(0;-\frac{5h}{12}\right)$. Затем, поочерёдно подставляем координаты этих точек в уравнение (1), получим $y_F=\frac{h}{4}$; $z_F=\frac{b}{4}$.

Ответ: $y_F=\frac{h}{4}$; $z_F=\frac{b}{4}$.

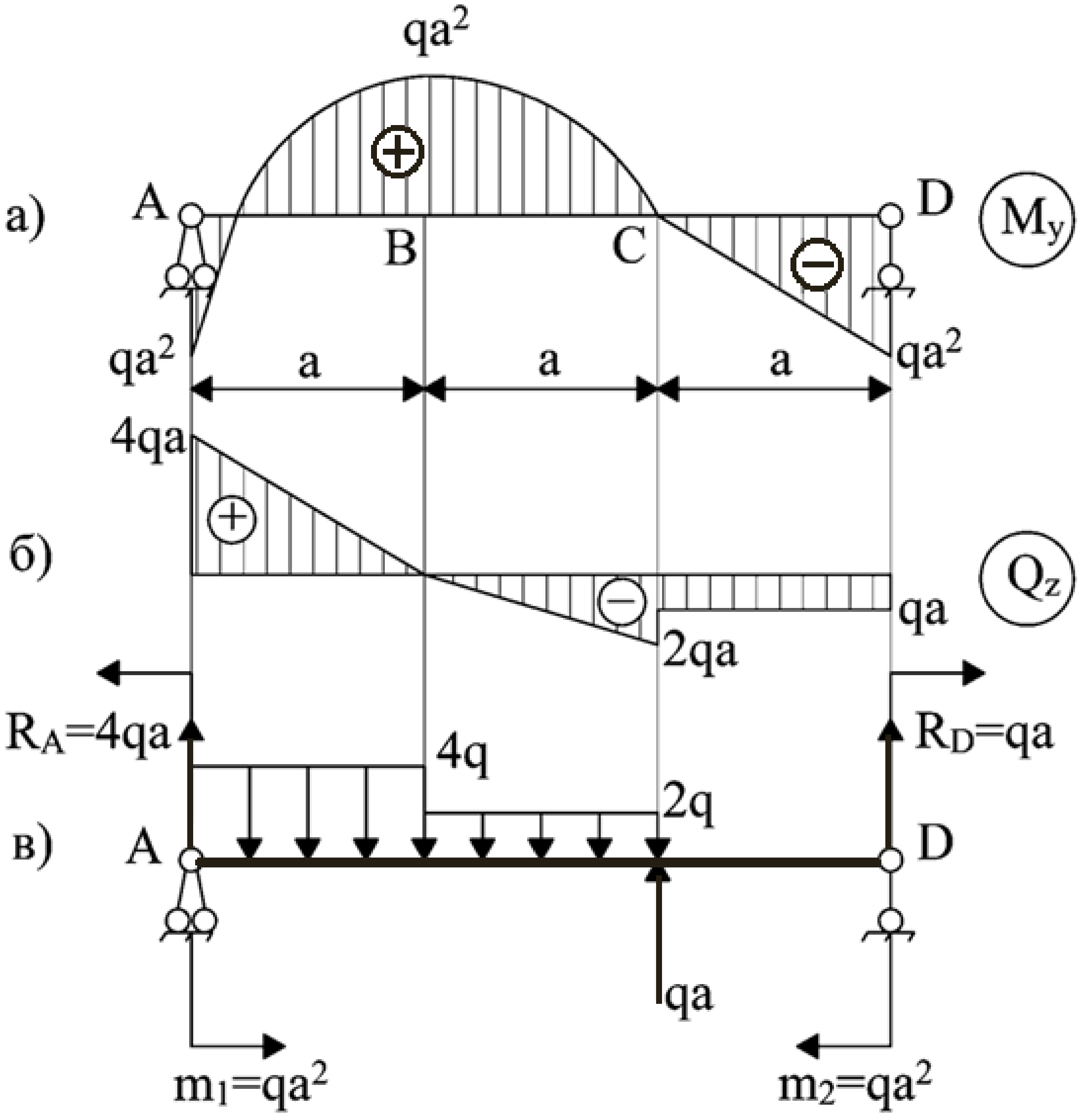
II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 4



Для однопролетной балки по заданной эпюре изгибающих моментов построить эпюру поперечных сил и определить нагрузку, действующую на балку.

<u>Решение:</u>



1. Построить эпюру Q_z.

Ордината эпюры M_y на участке *AB* возрастает, Q_z положительна.
Q_z изменяется по линейному закону.
В сечении *B* изгибающий момент экстремален $\rightarrow$ $Q_z = 0$.
M_y на участке *AB* изменяется на $2qa^2$ – величину площади эпюры Q_z.
Обозначим ординату эпюры Q_z в сечении *A* как $(Q_z)_A$. Тогда площадь эпюры Q_z на участке *AB*

$$\omega_{Q_z} = \frac{1}{2}(Q_z)_A = 2qa^2 \text{ отсюда } (Q_z)_A = 4qa.$$

Строится эпюра Q_z на левом участке *AB*.

На участке *BC* изгибающий момент убывает по параболе $\rightarrow$ $Q_z < 0$.
В сечении *B* изгибающий момент экстремален $\rightarrow$ $Q_z = 0$.
Ордината эпюры M_y изменяется на $\left(-qa^2\right)$.

Поперечная сила в сечении *C* обозначается как $(Q_z)_C$, тогда

$$\left(-qa^2\right) = \frac{1}{2}(Q_z)_C a \rightarrow (Q_z)_C = -2qa.$$

Строится эпюра Q_z на среднем участке *BC*.

На участке *CD* эпюра M_y убывает по линейному закону $\rightarrow$ $Q_z < 0$ и постоянна.
Ордината эпюры M_y убывает на $\left(-qa^2\right)$.
Если обозначить поперечную силу в сечении *D* как $(Q_z)_D$, тогда

$$\left(-qa^2\right) = (Q_z)_D a \rightarrow (Q_z)_D = -qa.$$

Строится эпюра Q_z на участке *CD*.

2. Определение внешней нагрузки.

В сечении *A* $Q_z = 4qa \rightarrow$ $R_A = 4qa$ – направлена вверх.
Поскольку Q_z на участке *AB* линейно уменьшается от $4qa$ до 0, то действует равномерно распределённая нагрузка, направленная вниз.
Обозначим интенсивность этой нагрузки $k_1 q$.
$k_1 q = 4qa \rightarrow k_1 = 4 \rightarrow$ интенсивность нагрузки $4q$.

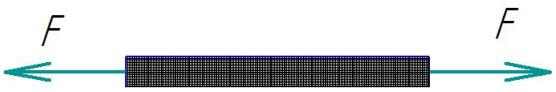
На участке *BC* эпюра Q_z изменяется линейно уменьшаясь от 0 до $(-2qa)$, следовательно равномерно распределённая нагрузка направлена вниз. Обозначим интенсивность этой нагрузки $k_2 q$.
Её равнодействующая $k_2 q = |2qa|$, т.е. $k_2 = 2$, а интенсивность нагрузки $2q$.

В сечении *C* на эпюре Q_z скачек вверх на величину $qa \to$ сосредоточенная сила qa направлена вверх.
На участке *CD* сила Q_z = const. $\to$ распределенной нагрузки нет.
$R_D = qa$ – направленная вверх.

Т.к. в сечении *A* на эпюре M_y есть скачок вниз на qa^2, то сосредоточенный момент $m_1 = qa^2$, направлен против часовой стрелки.
В сечении *D* эпюра имеет скачек вверх до нулевой линии на величину qa^2, следовательно, сосредоточенный момент $m_2 = qa^2$, направлен по часовой стрелке.

II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 5



Дано: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $F =$ 125 кН.
Сечение – квадрат со стороной $a = 0{,}015$ м.
Определить коэффициент Пуассона, если при растяжении стержня, размер a уменьшается на 0,01 мм.

Решение:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{поп}}{\varepsilon_{прод}} \right| .$$

При растяжении деформации:

$$\varepsilon_{прод} = \frac{F}{EA}; \;\; \varepsilon_{поп} = -\frac{\mu F}{EA} .$$

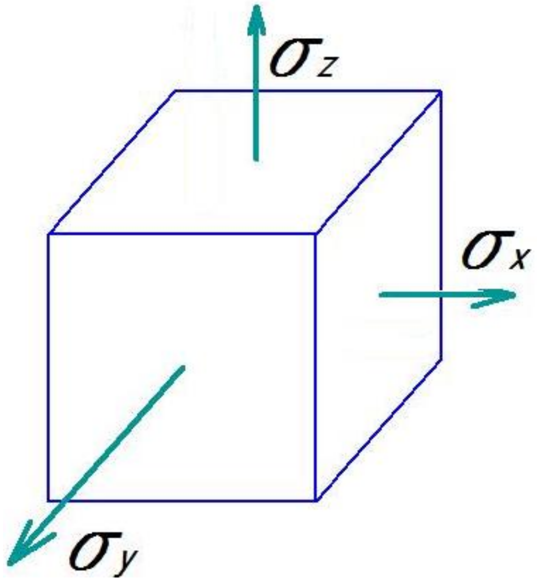
Изменения размера a: $\quad \Delta a = a \cdot \varepsilon_{поп} = -\dfrac{\mu a F}{EA};$

$$\mu = \frac{\Delta a \cdot E \cdot A}{a \cdot F} = 0{,}24 .$$

Ответ: $\mu = 0{,}24$.

II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов, 2018 год

Задача 6



Найти соотношение между σ_x, σ_y, σ_z , при котором возникает одноосная деформация в данном элементе.

Решение:

Относительная деформация в случае одноосного деформированного состояния:

$\varepsilon_x \neq 0;$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] = 0; \qquad \sigma_y = \sigma_x \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0; \qquad \sigma_z = \sigma_x \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_x \frac{\mu}{1-\mu}$$

Ответ : $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_x \dfrac{\mu}{1-\mu}$.