

## Численная модель коммутации коллекторных электрических машин в динамических режимах работы

А.И. Тихонов, Ю.Б. Казаков, доктора техн. наук, И.М. Лашманов, ст. преп.

Разработана численная модель процессов коммутации коллекторных электрических машин в динамических режимах работы с использованием результатов расчетов магнитных полей методом конечных элементов.

*Ключевые слова:* коммутация, коллекторные машины, динамические режимы работы.

## Numerical Model of Switching Commutator Machines in Dynamic Models

A.I. Tikhonov, Doctor of Engineering, Yu. B. Kazakov, Doctor of Engineering, I. M. Lashmanov, Senior Teacher

The authors developed the numerical model of switching processes of commutator machines in dynamic modes based on calculation results of magnetic fields with finite-element method.

*Key words:* switching, commutator machines, dynamic models.

Коммутационная надежность остается основной проблемой коллекторных машин (КМ), работающих в динамических режимах, с перегрузками, с частыми включениями и реверсированиями, особенно для неявнополюсных машин постоянного тока (НПМПТ) с распределенными обмотками индуктора [1] и при работе на переменном токе.

В НПМПТ смешанного возбуждения параллельная и последовательная обмотки возбуждения (ОВ), имеющие свои токи, числа витков и провода, могут иметь разновитковые катушки, разные их числа и шаги, быть распределены по разным пазам. Формы распределения намагничивающих сил ОВ для разных их размещений в зависимости от тока якоря меняются.

Конструктивные отличия НПМПТ – распределенность ОВ главных полюсов (ГП) на несколько катушек; распределенность магнитного потока ГП; малый и одинаковый зазор под ГП и добавочными полюсами (ДП) оказывают влияние на величину потока ГП и характер коммутации. Из-за разного числа пазов индуктора и якоря, неравномерного распределения компенсационной обмотки (КО) по пазам индуктора полной компенсации реакции якоря со стороны КО получить не удастся. Возникающие местные некомпенсированные поля обмотки якоря (ОЯ) ухудшают коммутацию.

В НПМПТ зачастую наблюдается затрудненная коммутация даже в режиме холостого хода. Это указывает на влияние поля ГП на коммутацию. Для оценки влияния особенностей НПМПТ на коммутацию целесообразно применение численных методов расчета магнитного поля, например метода конечных элементов (МКЭ) (рис. 1). Так, для НПМПТ [4] мощностью 40 кВт выполнены расчеты магнитных полей и индукции в зоне коммутации (рис. 2).

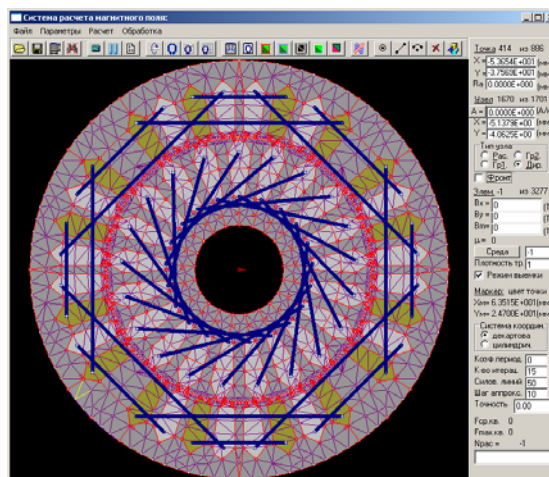


Рис. 1. Конечно-элементная модель КМ в окне библиотеки конечно-элементного моделирования магнитного поля

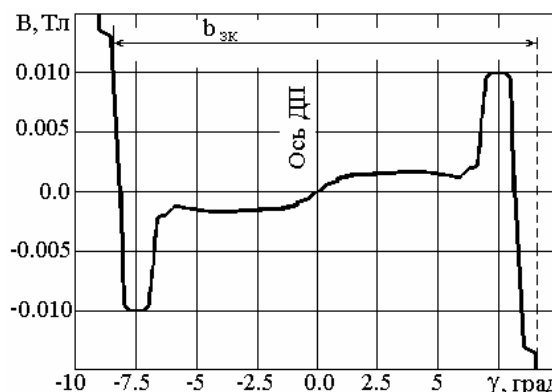


Рис. 2. Распределение индукции потока ГП НПМПТ в зоне коммутации

Искрение на коллекторе определяется ЭДС, наводимыми в коммутирующих секциях. В коммутируемых секциях ОЯ от поля ГП наводится ЭДС, усложняющая коммутацию. Добавка к реактивной ЭДС при номинальной нагрузке может достигать 10–15 %. При этом эта ЭДС за период коммутации  $T$  может ме-

нять знак четыре раза. Это затрудняет настройку коммутации.

Для генераторного режима явнополюсных машин постоянного тока (ЯМПТ) поле ГП во второй половине периода коммутации во время  $T/2 < t < T$  наводит в коммутируемой секции ЭДС такого направления, которое способствует ускорению коммутации, а для двигательного режима – замедлению коммутации. Наоборот, у НПМПТ в двигательном режиме в период  $T/2 < t < T$  при  $b_{дп} = b_{зк}$  в коммутируемых секциях наводится ЭДС, способствующая ускорению коммутации, а для генераторного режима – замедлению коммутации. В период  $0 < t < T/2$  все наоборот. То есть, у неявнополюсных двигателей постоянного тока (НПДПТ) из-за влияния поля ГП происходит снижение плотностей тока и под сбегающим, и под набегающим краями щетки. У неявнополюсных генераторов постоянного тока (НПГПТ) из-за влияния поля ГП происходит увеличение плотностей тока и под сбегающим, и под набегающим краями щетки.

Актуальной является задача расчета ЭДС в коммутируемых секциях с учетом особенностей конструкции КМ. Перспективным методом расчета является комбинирование численных моделей электрической цепи и магнитного поля машины, где модель поля используется для расчета параметров электрической цепи на каждом шаге интегрирования ее по времени [2]. При этом основная сложность, возникающая при моделировании коммутации, состоит в постоянном изменении схемы электрической цепи в ходе расчетного процесса, вызванном переключениями секций ОЯ на коллекторе при его перемещении.

Для расчета параметров электрической цепи КМ использована динамически подключаемая библиотека конечно-элементного моделирования магнитного поля [3]. С помощью этих функций в среде MathLab организована численная модель процессов коммутации.

Электрическая схема замещения КМ с учетом коммутации при числе пар полюсов  $p = 2$  в общем случае представлена на рис. 3.

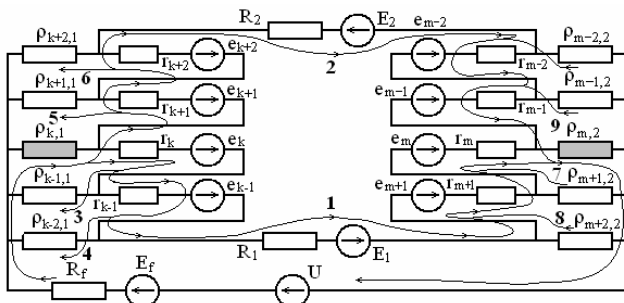


Рис. 3. Схема замещения КМ ( $R_1, R_2$  – сопротивления параллельных ветвей обмотки якоря;  $E_1, E_2$  – ЭДС, наводимые в параллельных ветвях ОЯ;  $\rho_{i,g}$  – сопротивление контакта между  $i$ -й коллекторной пластиной и щеткой из  $g$ -й группы;  $i_s, e_s$  – сопротивление и ЭДС  $s$ -й секции;  $R_f, E_f$  – сопротивление и ЭДС обмотки возбуждения;  $U$  – напряжение сети)

Так как по мере поворота якоря электрическая цепь КМ перестраивается, система диф-

ференциальных уравнений, описывающих динамику машины, должна формироваться на каждом шаге интегрирования.

Алгоритм формирования системы дифференциальных уравнений включает следующие шаги:

1. Формируются списки  $\Pi_g$  пластин коллектора, перекрываемых щетками (в простоя волновой обмотке все щетки, чередуясь, делятся на две группы по  $p$  щеток в каждой).
2. Формируются списки  $C_g$  секций, замкнутых щетками  $g$ -й группы накоротко.
3. Формируются списки  $B_v$  номеров секций, входящих в параллельные ветви ОЯ (простая волновая ОЯ содержит две ветви).
4. Первые два уравнения описывают механические процессы:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \Omega, \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{M - M_0 - M_n}{J}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $M$  – электромагнитный момент;  $\Omega$  – частота вращения;  $J$  – момент инерции якоря.

5. Два первых контура (по методу контурных токов) проходят через контакты с наименьшим сопротивлением  $\rho_{k,1}$  и  $\rho_{m,2}$ , определяемым по спискам  $\Pi_g$ , источник напряжения  $U$  и параллельные ветви ОЯ (рис. 4).

6. Остальные контуры проводятся в пределах каждой щеточной группы сопротивления  $\rho_{k,1}$  или  $\rho_{m,2}$  и остальных контактов данной группы. Направление каждого контура выбирается так, чтобы в контактах  $\rho_{k,1}$  и  $\rho_{m,2}$  оно совпадало с направлением контуров 1 и 2. Количество таких контуров  $n_g$  в пределах каждой  $g$ -й щеточной группы равно количеству короткозамкнутых секций в  $g$ -й группе, номера которых сохранены в списках  $C_g$ .

7. Короткозамкнутые секции в каждой группе делятся на две подгруппы  $C_{gv}$  с количеством элементов  $n_{gv}$ , хранящих номера секций, расположенных по отношению к сопротивлениям  $\rho_{k,1}$  и  $\rho_{m,2}$  со стороны  $v$ -х ветвей ОЯ (рис. 4).

8. Формирование списков номеров контуров  $K_{gv}$ , образованных секциями из списка  $C_{gv}$ .

9. Формирование подмножеств  $K_{gvs}$  списков  $K_{gv}$ , из которых исключаются первые  $s'-1$  элементов, где  $s'$  – порядковый номер, с которым контурообразующая секция  $s$  присутствует в списках  $C_{gv}$  и  $K_{gv}$ .

10. Формирование подмножеств  $C_{gvs}$ , состоящих из первых  $s'$  элементов списка  $C_{gvs}$ .

Для расчета ЭДС секций используется библиотека конечно-элементного моделирования магнитного поля, функции которой используются непосредственно в алгоритме интегрирования системы уравнений динамики КМ. Значения токов в секциях и обмотке воз-

буждения, а также угол поворота якоря берутся из расчета системы уравнений. После расчета магнитного поля библиотека возвращает потокосцепления секций и обмотки возбуждения.

Так как при вращении якоря потокосцепление  $s$ -й секции  $\Psi_s = \Psi_s(i_1, i_2, \dots, i_n, \alpha)$  зависит от токов во всех  $n$  контурах и от угла поворота ротора  $\alpha$ , можно воспользоваться преобразованием

$$e_s = -\frac{d\Psi_s}{dt} = -\sum_{p=1}^n \frac{\partial \Psi_s}{\partial i_p} \frac{di_p}{dt} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -\sum_{p=1}^n L_{sp} \frac{di_p}{dt} - C_s \Omega, \quad (2)$$

где

$$L_{sp} \approx \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_p}, \quad C_s \approx \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha}. \quad (3)$$

Аналогично для ОВ

$$E_f = -\frac{d\Psi_f}{dt} = -\sum_{p=1}^n L_{fp} \frac{di_p}{dt} - C_f \Omega, \quad (4)$$

где  $\Psi_f = \Psi_f(i_1, i_2, \dots, i_n, \alpha)$  – потокосцепление ОВ. ЭДС параллельных ветвей ОЯ

$$E_v = \sum_{s=1}^{nsv} e_{s,v} = -\sum_{s=1}^{nsv} \frac{d\Psi_{s,v}}{dt} = -\sum_{p=1}^n \left( \sum_{s=1}^{nsv} \frac{\partial \Psi_{s,v}}{\partial i_p} \right) \frac{di_p}{dt} - \left( \sum_{s=1}^{nsv} \frac{\partial \Psi_{s,v}}{\partial \alpha} \right) \frac{d\alpha}{dt} = -\sum_{p=1}^n L_{vp} \frac{di_p}{dt} - C_v \Omega, \quad (5)$$

где

$$L_{vp} \approx \sum_{s=1}^{nsv} \frac{\Delta \Psi_{s,v}}{\Delta i_p}, \quad C_v \approx \sum_{s=1}^{nsv} \frac{\Delta \Psi_{s,v}}{\Delta \alpha}. \quad (6)$$

Система уравнений, описывающих динамику КМ с учетом коммутации, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}. \quad (7)$$

Матрица коэффициентов  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} \\ C_2 & 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2n} \\ C_3 & 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & L_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n & 0 & L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Вектор неизвестных  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\mathbf{X} = [\alpha \quad \Omega \quad i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_{n-1} \quad i_n]^T, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} L_{1q} &\approx -\frac{\Delta \Psi_f}{\Delta i_q} - \sum_{s=1}^{ns1} \frac{\Delta \Psi_{s,1}}{\Delta i_q} - \sum_{s \in C_{11}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} - \sum_{s \in C_{21}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n}, \\ C_1 &\approx -\frac{\Delta \Psi_f}{\Delta \alpha} - \sum_{s=1}^{ns1} \frac{\Delta \Psi_{s,1}}{\Delta \alpha} - \sum_{s \in C_{11}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} - \sum_{s \in C_{21}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha}, \\ L_{2q} &\approx -\frac{\Delta \Psi_f}{\Delta i_q} + \sum_{s=1}^{ns2} \frac{\Delta \Psi_{s,2}}{\Delta i_q} + \sum_{s \in C_{12}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} + \sum_{s \in C_{22}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n}, \\ C_2 &\approx -\frac{\Delta \Psi_f}{\Delta \alpha} + \sum_{s=1}^{ns2} \frac{\Delta \Psi_{s,2}}{\Delta \alpha} + \sum_{s \in C_{12}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} + \sum_{s \in C_{22}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha}, \\ L_{pq} &\approx -\sum_{s \in C_{11s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n, p \in K_{11}}, \quad C_p \approx -\sum_{s \in C_{11s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} \Bigg|_{p \in K_{11}}, \\ L_{pq} &\approx \sum_{s \in C_{12s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n, p \in K_{12}}, \quad C_p \approx \sum_{s \in C_{12s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} \Bigg|_{p \in K_{12}}, \\ L_{pq} &\approx -\sum_{s \in C_{21s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n, p \in K_{21}}, \quad C_p \approx -\sum_{s \in C_{21s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} \Bigg|_{p \in K_{21}}, \\ L_{pq} &\approx \sum_{s \in C_{22s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta i_q} \Bigg|_{q=1..n, p \in K_{22}}, \quad C_p \approx \sum_{s \in C_{22s}} \frac{\Delta \Psi_s}{\Delta \alpha} \Bigg|_{p \in K_{22}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вектор правых частей  $\mathbf{F}$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Omega \\ M - M_0 - M_n \\ -U + R_f(i_1 + i_2) + R_f i_1 + \sum_{s \in C_{11}} r_s \left( i_1 + \sum_{j \in K_{11s}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{21}} r_s \left( i_1 + \sum_{j \in K_{21s}} i_j \right) + \rho_{k,1} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{11}} i_j + \sum_{j \in K_{12}} i_j \right) + \rho_{m,2} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{21}} i_j + \sum_{j \in K_{22}} i_j \right) \\ -U + R_f(i_1 + i_2) + R_f i_2 + \sum_{s \in C_{12}} r_s \left( i_2 + \sum_{j \in K_{12s}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{22}} r_s \left( i_2 + \sum_{j \in K_{22s}} i_j \right) + \rho_{k,1} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{11}} i_j + \sum_{j \in K_{12}} i_j \right) + \rho_{m,2} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{21}} i_j + \sum_{j \in K_{22}} i_j \right) \\ \rho_{k-s,1} i_p + \rho_{k,1} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{11}} i_j + \sum_{j \in K_{12}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{11s}} r_s \left( i_1 + \sum_{j \in K_{11s}} i_j \right) \Bigg|_{p \in K_{11}}, \\ \rho_{k-s,1} i_p + \rho_{k,1} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{11}} i_j + \sum_{j \in K_{12}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{12s}} r_s \left( i_2 + \sum_{j \in K_{12s}} i_j \right) \Bigg|_{p \in K_{12}}, \\ \rho_{m-s,2} i_p + \rho_{m,2} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{21}} i_j + \sum_{j \in K_{22}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{21s}} r_s \left( i_1 + \sum_{j \in K_{21s}} i_j \right) \Bigg|_{p \in K_{21}}, \\ \rho_{m-s,2} i_p + \rho_{m,2} \left( i_1 + i_2 + \sum_{j \in K_{21}} i_j + \sum_{j \in K_{22}} i_j \right) + \sum_{s \in C_{22s}} r_s \left( i_2 + \sum_{j \in K_{22s}} i_j \right) \Bigg|_{p \in K_{22}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Расчет матриц  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{M}$  осуществляется на каждом  $t$ -м шаге цикла интегрирования. Алгоритм интегрирования (7) состоит из следующих шагов:

1. Определенные на  $t$ -м шаге интегрирования контурные токи  $i_q$  пересчитываются в токи в цепи ОЯ  $i_a$ , параллельных ветвей ОЯ  $i_{a1}$  и  $i_{a2}$  и коммутирующих секций  $i_s$ :

$$\begin{aligned}
 i_{a1} &= i_1, \quad i_{a2} = i_2, \quad i_a = i_1 + i_2, \\
 i_{s \in C_{11s}} &= i_1 + \sum_{j \in K_{11s}} i_j, \\
 i_{s \in C_{12s}} &= -i_2 - \sum_{j \in K_{12s}} i_j, \\
 i_{s \in C_{21s}} &= i_1 + \sum_{j \in K_{21s}} i_j, \\
 i_{s \in C_{22s}} &= -i_2 - \sum_{j \in K_{22s}} i_j.
 \end{aligned} \tag{12}$$

2. Рассчитываются элементы вектора  $F$ .

3. Значения токов пересылаются в полевую модель, рассчитывается магнитное поле, определяются потокоцепления ОВ  $\Psi_{ft}$  и всех секций ОЯ  $\Psi_{st}$  на  $t$ -м шаге интегрирования и основной поток  $\phi_t$ .

4. Каждому  $q$ -му контурному току дается приращение  $\Delta i_q$ . Рассчитывается магнитное поле, и в секциях ОЯ и ОВ определяются приращения потокоцеплений  $\Delta \Psi_{st}$  и  $\Delta \Psi_{ft}$ . По (10) рассчитываются элементы  $L_{pq}$  матрицы  $M$ .

5. Якорь поворачивается на угол  $\Delta \alpha$  при неизменных контурных токах, вновь рассчитывается магнитное поле и определяются приращения  $\Delta \Psi_{st}$  и  $\Delta \Psi_{ft}$  секций и ОВ. Рассчитываются элементы  $C_p$  матрицы  $M$ .

6. По (7) рассчитывается вектор производных по времени от интегрируемых величин. Определяется вектор интегрируемых величин

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} \approx \mathbf{X}_t + \left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_t \cdot \Delta t. \tag{13}$$

7. Элементы вектора  $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$  пересчитываются в реальные величины, характеризующие процессы на  $t+\Delta t$ -м шаге интегрирования:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{t+\Delta t} &\approx \alpha_t + \left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_t \cdot \Delta t, \\
 \Omega_{t+\Delta t} &\approx \Omega_t + \left. \frac{d\Omega_2}{dt} \right|_t \cdot \Delta t, \quad i_{q_{t+\Delta t}} \approx i_{q_t} + \left. \frac{di_{q_{2+q}}}{dt} \right|_t \cdot \Delta t.
 \end{aligned} \tag{14}$$

*Лашманов Иван Михайлович*

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
старший преподаватель кафедры электромеханики,  
адрес: г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34,  
телефон (4932) 26-97-06,  
e-mail: elmash@em.ispu.ru

*Тихонов Андрей Ильич,*

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой физики,  
адрес: г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34,  
телефон (4932) 26-97-06,  
e-mail: elmash@em.ispu.ru

*Казаков Юрий Борисович,*

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой электромеханики,  
адрес: г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34,  
телефон (4932) 26-97-06,  
e-mail: elmash@em.ispu.ru

К полученным контурным токам применяется преобразование (12).

8. Рассчитывается электромагнитный момент:

$$M_t = C_m \cdot \phi_t \cdot i_{at}. \tag{15}$$

9. Процесс повторяется, начиная с п. 1.

Приведенный математический аппарат позволяет осуществить расчет динамического режима КМ с учетом процессов в коммутирующих секциях, особенностей конструкции магнитной системы и формы питающего напряжения.

В среде MatLab разработана программа, позволяющая формировать и решать систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику КМ с учетом процессов коммутации. Индуктивные параметры секций находятся из расчета магнитного поля. Потокоцепление секции определяется углом поворота ротора, токами якоря в параллельных ветвях, токами возбуждения и коммутируемых секций. Расчет поля и переформирование системы осуществляется на каждом шаге интегрирования. Разработана интерактивная визуальная подсистема для проверки правильности формирования всех списков.

#### Список литературы

1. Казаков Ю.Б., Лашманов И.М. Особенности и моделирование коммутации в динамических режимах неявнополюсных коллекторных электрических машин: мат-лы междунар. науч.-техн. конф. «Состояние и перспективы развития электротехнологии». Т. 2 / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2009. – С. 57.
2. Технология численного исследования электрических машин с использованием библиотеки конечно-элементного моделирования магнитного поля / А.И. Тихонов, С.Ю. Кучеров, И.М. Лашманов, Д.В. Рубцов // Вестник ИГЭУ. – 2006. – Вып. 3. – С. 5–8.
3. Тихонов А.И., Казаков Ю.Б. Программирование численного эксперимента с использованием конечно-элементной модели магнитного поля в объектах электромеханики / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2008.