© «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 2006 г.

УДК 518.5

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СМЕШАННОМ ВИДЕ

АЙВАЗАДЕ Ш., МУНИЦЫН А.И., кандидаты техн.наук

Представлены результаты построения плоских четырехузловых конечных элементов смешанного вида для динамических расчетов конструкций, состоящих из различных материалов. Приведены результаты тестирования на примере консольной балки.

Ключевые слова: метод конечных элементов, теория упругости.

THE CALCULATION OF RUN-TIME CHARACTERISTICS OF STRUCTURES BY MEANS OFFINITE ELEMENTS METHOD IN COMPOUND TYPE

Sh. AJVAZADE, Ph.D., A.I. MUNITSIN, Ph.D.

This paper represents the results of the construction of compound type flat quadranodal finite elements for run-time calculations of structures, which consist of different materials. Testing results are given by the example of a cantilever bar.

Key words: finite-element method, theory of elasticity.

Расчет методом конечных элементов конструкций, содержащих границу двух материалов с различными механическими характеристиками, например клеевое соединение, требует использования очень мелких элементов в области, прилегающей к границе. Альтернативным методом достижения большой точности вычислений является использование в этой области конечных элементов смешанного вида [1, 2].

При использовании метода конечных элементов в смешанном виде поля перемещений и напряжений одновременно задаются для всего элемента. Применение метода Галеркина к вспомогательным уравнениям теории упругости, а не к комбинации дифференциальных уравнений (равновесия или совместности деформаций) приводит к выражениям с одновременным участием двух полей. Так как вспомогательные уравнения можно записать различными путями, существует несколько функционалов, в которые входят два поля.

Функционал Рейсснера имеет вид

$$V(\sigma_{ij},u_i)=\int\limits_{\Omega}\left\{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(u)-W_c(\sigma_{ij})-\rho\ddot{u}_i u_i\right\}dv-$$

$$-\int\limits_{\Gamma\gamma}\bar{t}_j u_i ds-\int\limits_{\Gamma u}(u-\bar{u}_i)\,t_i ds, \tag{1}$$

где $W_c(\sigma_{ij})$ – плотность потенциальной энергии упругой деформации; $\varepsilon_{ij}(u)$ – тензор деформаций; $\rho\ddot{u}_i$ – силы инерции; $\bar{f}_i,\bar{t}_i$ – объемные и поверхностные силы; $\bar{u}_i$ – поле перемещений; Γ_t – участок границы с заданными напряжениями; Γ_u – участок границы с заданными перемещениями.

Варьируя функционал (1) и интегрируя его по частям, можно показать, что уравнения Эйлера для функционала *V* представляют собой уравнения равновесия и дифференциальные соотношения, связывающие напряжения с перемещениями:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}} \quad \text{на} \quad \Omega;$$

$$\sigma_{ij,j}+\rho\ddot{u}_i+\bar{f}_i=0 \quad \text{на} \quad \Omega;$$

$$\sigma_{ij}\cdot n_j=\bar{t}_i \quad \text{на} \quad \Gamma_t;$$

$$u_i=\bar{u}_i \quad \text{на} \quad \Gamma_u.$$

Рассмотрим процедуру построения матриц жесткости и упругости для плоского элемента смешанного вида, позволяющего одновременно удовлетворять на границе элементов условиям стыковки напряжений и деформаций. Это прямоугольный четырехузловой элемент с пятью степенями свободы в каждом узле – двумя компонентами перемещений и тремя компонентами напряжений. Для аппроксимации полей перемещений и напряжений используются классические интерполяционные функции для изопараметрического элемента:

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=1}^{4}N_k(\xi,\eta)\sigma_{ij}^k;$$

$$u_i=\sum_{k=1}^{4}N_k(\xi,\eta)u_i^k, \qquad (i,j=1,2,3).$$

Функция формы определяется как

$$N_k=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_k)(1+\eta\eta_k),$$

где ξ_k,η_k принимают значения в узлах $(\pm 1,\pm 1)$.

В дискретной форме выражения для полей напряжений и перемещений имеет следующий вид:

$\sigma_{ij}=ZF;\ \ \varepsilon_{ij}=D\Delta;$

$t_i=LF;\ \ u_i=Y\Delta;$

векторы узловых напряжений и перемещений –

$F=(\sigma_{11}^1,\sigma_{11}^2,\sigma_{11}^3,\ldots,\sigma_{12}^3,\sigma_{12}^4)^T;$

$\Delta=(u_1^1,u_1^2,u_1^3,\ldots,u_2^3,u_2^4)^T,$

где *Z, D, L, Y* – матрицы интерполяции напряжений, деформаций, нагрузок и перемещений, соответственно.

Для использования метода конечных элементов дискретизируем выражение (1):

$$V(F,\Delta) = F^T K_{12}\Delta - \frac{1}{2}F^T K_{11}F - \\ -\Delta^T M\ddot{\Delta} - \Delta^T \overline{F} + F^T \overline{\Delta}, \tag{2}$$

где

$$K_{12} = \int\limits_{\Omega e} Z^T D dv - \int\limits_{\Gamma u} L^T Y dv\ ;$$

$$K_{11} = \int\limits_{\Omega e} Z^T SZ dv\ ,\ M = \int\limits_{\Omega e} Y^T R Y dv;$$

$$\overline{F} = \int\limits_{\Gamma t} Y^T \overline{t} ds, \overline{\Delta} = \int\limits_{\Gamma u} L^T \overline{u} ds;$$

S – матрица податливости, содержащая свойство материалов:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix};$$

R – матрица инерции, содержащая плотность материалов:

$$R = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Варьируя функционал V в форме (2) как по F, так и по Δ получаем следующую систему дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{F} \\ \ddot{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{F} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Размерность системы уравнений для одного элемента равна 20. Первые 12 уравнений являются алгебраическими, следовательно, можно использовать процедуру конденсации.

Система уравнений (3) имеет решение $F = F_a \sin\omega t,\ \Delta = \Delta_a \sin\omega t$.

В результате имеем стандартную проблему собственных значений

$(K - \omega^2 M)V = 0$.

Тестирование программы проводилось на задаче свободных колебаний консольной балки с соотношением длины к ширине, равным 6. Модуль упругости и плотность материала принимались равными единице. Результаты расчета приведены в таблице.

Форма колебаний	4x4	4x5	4x6	4x10	4x20
Первая изгибная	0.028898	0.028375	0.028122	0.027803	0.027691
Вторая изгибная	0.182643	0.171292	0.165882	0.158946	0.156310
Первая продольная	0.262797	0.262564	0.262508	0.262358	0.262308

Точные значения собственной частоты для двух первых форм изгибных колебаний по технической теории равны соответственно 0,028191 и 0,176682, для продольных колебаний первая частота равна 0,226725. По высоте балка разбивалась на четыре части, число разбиений по длине варьировалось.

Список литературы

1. Ate A., Aivazzadeh S. Un element fini mixte tridimensionnel pour le calcul des contraintes d'interface // Revue europeene des elements finis. – 1999. – V.8. – N 7. – P. 791–811.

2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

Муницын Александр Иванович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон (4932) 26-97-11,
e-mail: tipm@tipm.ispu.ru