© «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 2006 г.

УДК 378

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТРУКТУРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КОМЛЕВ В.В., асп., ЖУКОВ В.П., МИЗОНОВ В.Е., доктора техн. наук, КАДАМЦЕВА Г.Г., канд. техн. наук

Предложена математическая модель образовательных технологий, представлены решения задачи структурной оптимизации технологии обучения с использованием генетического алгоритма.

Ключевые слова: математическая модель, технология обучения, генетический алгоритм, система кодификации, контроль знаний.

MATHEMATICAL SIMULATION AND EDUCATIONAL METHODS STRUCTURAL OPTIMIZATION

V.V. KOMLEV, postgraduate, V.P. ZHUKOV, Ph.D., V.E. MIZONOV, Ph.D., G.G. KADAMTSEVA, Ph.D.

This paper represents the mathematical model of educational methods and the solutions of educational methods structural optimization problem, using genetic algorithm.

Key words: mathematical model, educational methods, genetic algorithm, coding system, knowledge control.

Под *технологией обучения* [1] в данном случае понимается совокупность операций, характерных для образовательного процесса, и порядок их объединения. Считаем, что технология обучения определяется двумя основными технологическими операциями: *операцией обучения* и *операцией тестирования* (*контроля знаний*). Знания студентов предлагается описывать законом распределения студентов по числу решенных задач, которое будем называть *вектором знаний*, и записывать в виде матрицы-столбца. Численное значение элементов данной матрицы f_i для группы студентов показывает долю студентов, решающих i задач контроля. Матрица $\mathbf{f} = \{f_i\}$ имеет размер $(n+1)\times 1$, где n – число контрольных задач, при этом f_0 – доля студентов, которые решают 0 задач контроля, f_n – доля студентов, решающих все тестовые задачи.

При обучении объем знаний и навыков студентов увеличивается и число решаемых ими задач растет. Для описания трансформации знаний при обучении предложена матричная модель обучения, которая по известному вектору знаний до обучения позволяет рассчитать вектор знаний после него. Матричное уравнение обучения имеет вид

$$\mathbf{f''} = \mathbf{B^k} \times \mathbf{f'}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{f'}$, $\mathbf{f''}$ – распределение студентов по знаниям (вектор знаний) до и после обучения соответственно; $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ – матрица обучения размера $(n+1)\times(n+1)$, i, j = 0, 1, 2, ..., n. Значение элемента матрицы обучения b_{ij} показывает долю студентов, которые, решая до обучения j задач, после обучения стали решать i задач контроля.

Для процесса обучения матрица **B** является нижней треугольной, для процесса забывания (уменьшения знаний со временем) – верхней треугольной. Если эти процессы происходят одновременно, то матрица **B** – квадратная.

При повторном обучении (повторении материала на практических занятиях, лабораторных работах или самостоятельно) знания студентов тоже будут изменяться. Из предположения, что каждая операция повторного обучения характеризуется одной и той же матрицей **B**, вектор знаний после k повторений может быть найден следующим образом:

$$\mathbf{f''} = \mathbf{B^k} \times \mathbf{f'}, \qquad (2)$$

Для экспериментального определения вектора знаний и матрицы обучения были проведены специальные исследования и разработана методика обработки полученных данных.

При тестировании проверяется качество знаний и осуществляется разделение студентов на два или более потоков по признаку *знает – не знает*. Качество контроля тем выше, чем меньше студентов получают незаслуженные оценки. Истинные знания определяются объемом всех знаний студента по предмету. Выявить эти знания возможно при тестировании по всем контрольным вопросам, которое провести с каждым студентом в системе высшего образования не представляется возможным. При реальном тестировании студенту предлагается ограниченная выборка контрольных тестов, после решения которых студенту выставляется оценка. Очевидно, что такая оценка не всегда объективна. Для описания процесса контроля знаний воспользуемся диагональной матрицей контроля, значения элементов c_{ii} которой показывают вероятность прохождения контроля с положительной оценкой студентами i-го класса знаний. Очевидно, что для студентов с разными знаниями эти вероятности будут различаться. Вектор знаний студентов после контроля определяется как произведение матрицы контроля и входного вектора знаний:

$$\mathbf{f2} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \times \mathbf{f'};$$

$$\mathbf{f3} = \mathbf{C} \times \mathbf{f'},$$

где **f2**, **f3** – вектор знаний для студентов, не прошедших и прошедших контроль соответственно; **I** – единичная матрица; $\mathbf{f'}$ – исходное распределение студентов по знаниям (до контроля); **C** – матрица контроля.

Синтез математических моделей отдельных технологических операций позволяет создавать математическое описание всей технологии обучения.

Пусть имеется произвольная технологическая система обучения, которая включает m операций обучения и тестирования. В общем случае на вход i-го элемента могут подаваться потоки от остальных (m – 1) элементов схемы:

$$\mathbf{K_{i1}f'_1} + \mathbf{K_{i2}f'_2} + \ldots + \mathbf{K_{i,i-1}f'_{i-1}} + \mathbf{K_{i,i+1}f'_{i+1}} + \ldots + \mathbf{K_{im}f'_m} + \mathbf{fo_i} - \mathbf{f'_i} = 0, \qquad (3)$$

где $\mathbf{f'_L}$ – вектор знаний на входе в элемент с номером L; $\mathbf{K_{i,L}}$ – квадратная матрица технологической операции; произведение $\mathbf{K_{i,L}f'_L}$ – вектор знаний студентов, которые

© ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

направляются из элемента L в i-й элемент; **fo**$_i$ – внешний для ТСО вектор знаний.

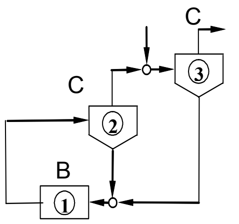
Уравнения, записанные для каждого элемента схемы, представляются в виде системы m линейных матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-I} & \mathbf{K_{12}} & \mathbf{K_{13}} & \dots & \mathbf{K_{1m}} \\ \mathbf{K_{21}} & \mathbf{-I} & \mathbf{K_{23}} & \dots & \mathbf{K_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K_{m1}} & \mathbf{K_{m2}} & \mathbf{K_{m3}} & \dots & \mathbf{-I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f'_1} \\ \mathbf{f'_2} \\ \dots \\ \mathbf{f'_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-fo_1} \\ \mathbf{-fo_2} \\ \dots \\ \mathbf{-fo_m} \end{pmatrix} \quad (4)$$

или $\mathbf{K} \times \mathbf{F'} = -\mathbf{F0}$

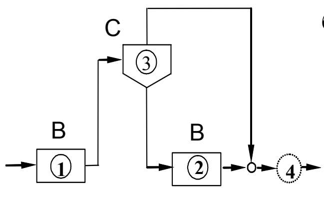
где **K** – блочная матрица размера m×m блоков, определяющая структуру и состав технологической системы обучения; **F′** – блочная матрица размера m×1 блоков, описывающая вектор знаний на входе в элементов схемы; **F0** – блочная матрица из внешних для ТСО векторов знаний.

Каждый столбец блочной матрицы **K** относится к одному элементу схемы. Операция обучения имеет один вход и один выход, поэтому относящийся к ней столбец матрицы **K** может включать не более двух ненулевых блоков. Классификатор имеет один вход и два выхода, при этом соответствующий столбец матрицы может содержать не более трех ненулевых блоков. На рис. 1 в качестве примера приведены две технологически схемы обучения и соответствующие им матричные математические модели.



а) **01.31.2**

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I}-\mathbf{C_2} & \mathbf{I}-\mathbf{C_3} \\ \mathbf{B_1} & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{C_2} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f_1} \\ \mathbf{f_2} \\ \mathbf{f_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{f_0} \end{bmatrix}$$



б) **0.42.4.3**

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & \mathbf{I}-\mathbf{C_3} & 0 \\ \mathbf{B_1} & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B_2} & \mathbf{C_3} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f_1} \\ \mathbf{f_2} \\ \mathbf{f_3} \\ \mathbf{f_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Варианты схем (а), (б), коды и матричные модели технологических систем обучения: B – операция обучения, C – контроля знаний

Решение системы линейных уравнений (4) позволяет определить знания студентов на каждом этапе ТСО, а также перейти к задаче оптимизации обучения: провести обучение с получением максимальной доли успевающих студентов при заданных затратах на обучение. Управление системой предлагается осуществлять изменяя ее структуру, которая описывается с помощью специально разработанного кода **X**. Вектор исходных данных а включает знания до обучения, число модулей и матрицы преобразования знаний в каждом модуле. Математическая запись сформулированной задачи имеет вид

$$F = \Psi(\alpha, \mathbf{X}, S) \Rightarrow \max_{X} \quad (5)$$

где F – доля отличников; S – затратные ограничения.

Задача (5) решается с помощью генетического алгоритма [2, 3], который обладает существенными преимуществами по сравнению с методами случайного поиска. Основная идея метода заключается в использовании генетических закономерностей эволюции в живой природе для решения технических задач.

Первым этапом генетического алгоритма является разработка системы кодификации структуры технологической системы обучения, которая позволяла бы по заданной схеме формировать код (геном) или по заданному коду однозначно восстанавливать схему.

В настоящей работе используется следующий принцип кодификации. Код-число состоит из ячеек, условно разделенных знаками (например, точками). Каждая ячейка (ген) соответствует предварительно пронумерованным элементам схемы (возрастание номера идет справа налево). Если кодируемый элемент – «обучение», то в ячейке размещается одно число, соответствующее номеру элемента, в который из нее направляется поток студентов. Если кодируемый элемент – «контроль знаний», то чисел два: справа номер элемента, в который уходит поток студентов, сдавших контроль; слева – номер элемента, в который уходит поток студентов, «заваливших» тест. Если после элемента один или несколько потоков покидают схему, то в соответствующем месте ставится нуль. Ограничимся рассмотрением схем с числом элементов менее 9 (n ≤ 9). Это ограничение связано с номером элемента, который записывается однозначным числом, или цифрой. При необходимости увеличения числа рассматриваемых элементов ТСО и сохранения предлагаемой системы кодировки можно воспользоваться, например, шестнадцатеричным исчислением (n ≤ 15) или массивом чисел.

Поскольку на настоящем этапе работы рассматриваются схемы только с одним входным потоком, нумерацию элементов рекомендуется начинать с того элемента, в который этот поток подается. На рис. 1 приведены коды схем, построенные по указанным правилам. Особенностью моделирования схемы (б) является введение искусственного элемента («обучение») на выходе из нее. Матрица этого обучения не участвует в построении технологической блочной матрицы, а вектор знаний на входе в нее соответствует вектору знаний на выходе из схемы.

Таким образом, предложенный подход позволяет кодировать любую структуру технологической схемы обучения и автоматизировать процедуру составления ее матричной математической модели.

На следующем этапе реализации генетического алгоритма случайным образом генерируют коды нескольких схем начальной популяции и сортируют их по значениям целевой функции. Затем из популяции также случайным образом выбирают две схемы (родителей) и скрещивают их между собой. Естественно, что возможны различные варианты обмена генами (элементами кода) при скрещивании. В данной работе использован один из простейших вариантов скрещивания – обмен частями кодов. В результате обмена получают схемы-потомки, для которых также рассчитываются значения целевой функции. Процедура скрещивания показана на рис. 2. В популяции после скрещивания оставляют наиболее эффективные с точки зрения целевой функции схемы.

Скрещивание повторяется заданное число раз или до получения схем с требуемым значением целевой функции. Сохранение и закрепление полезных качеств у потомства позволяет существенно уменьшить время решения оптимизационной задачи, по сравнению с методами чисто случайного поиска, например, методом Монте–Карло.

На рис. 3 показаны результаты применения описанного алгоритма к анализу схем, состоящих из двух модулей обучения и двух модулей контроля знаний. Поскольку наличие четырех элементов в схеме приводит хотя и к большому, но все же ограниченному числу вариантов их объединения, на рис. 3 представлены характеристики практически всех возможных схем, а не только оптимальной по принятой целевой функции. Каждая точка на графике соответствует определенной схеме и связывает показатели качества обученных студентов на выходе из технологии с показателем, характеризующим затраты на его достижение. На вход в каждую схему подаются необученные студенты, которые не умели решать ни одной задачи контроля. Качество «готового продукта» оценивалось долей отличников, которые могли решать после обучения все задачи контроля.

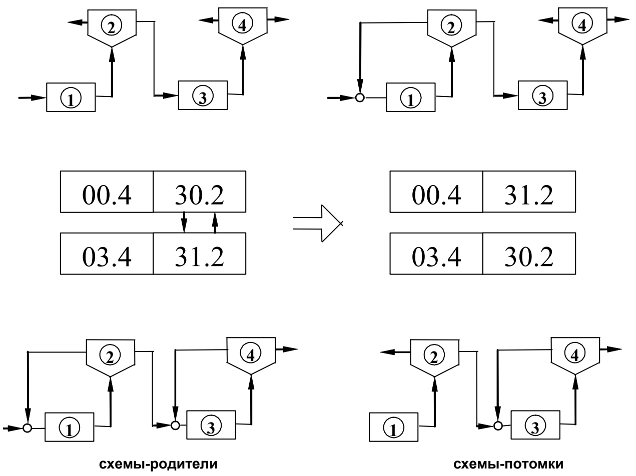


Рис. 2. Процедура обмена элементами кода (скрещивание)

Формирование ограничений для оценки затрат напрямую связано с исходными допущениями модели и должно быть обсуждено особо. В рассматриваемом примере, служащем иллюстрацией работоспособности предложенного подхода, в качестве затратного критерия использована сумма массопотоков через все элементы схемы:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (f_i)_j .$$

Естественно, что при решении конкретных задач необходимо вводить более точные технико-экономические модели.

Наивысшее качество обучения студентов по принятой целевой функции обеспечивает схема с кодом 10.4.13.2, где значение целевой функции составляет 0,625, в то же время эта схема является и наиболее дорогой. Переход к схеме с кодом 10.4.13.3 ведет к уменьшению значения целевой функции на пять абсолютных процентов, но дает возможность уменьшить критерий затрат (S) примерно в полтора раза.

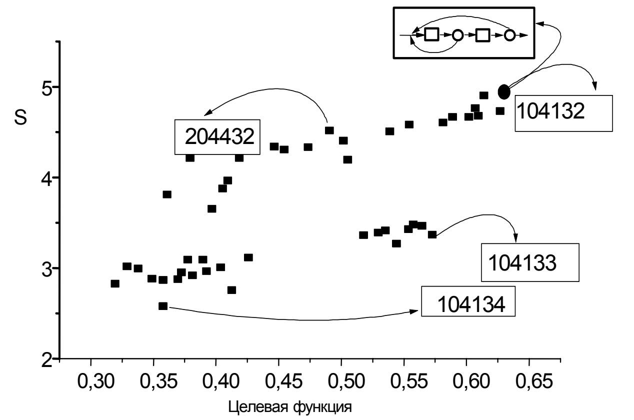


Рис. 3. Структурная оптимизация схемы, состоящей из двух операций обучения и двух операций контроля знаний

Наименее затратная схема 10.4.13.4. дешевле в 2,6 раза, но дает почти двукратное уменьшение значения целевой функции. Точки, ограничивающие область решений снизу–справа, образуют множество Парето [4], обусловленное двумя критериями системы: качеством и затратами. Эти точки образуют множество объектов, оптимальных по Парето, и показывают оптимальное соотношение затрат и качества.

Таким образом, разработанная методика позволяет находить наряду с оптимальным решением поле характеристик технологических схем, из которых эффективные технологии могут выбираться с помощью экспертных оценок или путем привлечения экономических моделей и уточнения целевых функций.

Список литературы

1. **Кадамцева Г.Г., Жуков В.П., Мизонов В.Е.** Матричная формализация и управление качеством образовательных технологий // Современные наукоемкие технологии. – 2005. – Вып. 3. – С. 30–35.

2. **Holland J.H.** Genetische Algorithmen // Spektrum der Wissenschaft. – 1992. – Sept. – S.44.

3. **Brady R.M.** // Nature. – 1985. – V.317. – P.804.

4. **Дорохов И.Н., Меньшиков В.В.** Системный анализ процессов химической технологии. – М.: Наука, 2005.

Мизонов Вадим Евгеньевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики,
e-mail: mizonov@home.ivanovo.ru
тел.: (8-4932) 269745

Жуков Владимир Павлович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики,
телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: mizonov@home.ivanovo.ru

Комлев Владимир Валерьевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант,
телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: mizonov@home.ivanovo.ru

Кадамцева Галина Геннадьевна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук,
телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: mizonov@home.ivanovo.ru