

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

АГАФОНОВА Н.А., канд. техн. наук

Рассматривается процесс построения математических моделей с помощью феноменологического метода с точки зрения обучения математическому моделированию.

*Ключевые слова:* математическая модель, феноменологический метод, термодинамика, принцип локального равновесия.

## PHENOMENOLOGICAL METHOD MATHEMATICAL BASIS OF ANALYTIC MODEL CONSTRUCTION OF POWER ENGINEERING CONTROL OBJECTS

AGAFONOVA N.A., Ph.D.

This paper is devoted to the process of mathematical model construction by means of phenomenological method in the view of mathematical simulation training.

*Key words:* mathematical model, phenomenological method, thermodynamics, local equilibrium principle.

Среди всего спектра исследований, выполняемых на кафедре систем управления ИГЭУ, особое внимание уделяется реализации наиболее сложных функциональных задач АСУТП, в том числе, совершенствованию алгоритмов управления теплотехнического оборудования ТЭС. Одним из классов таких задач является построение всережимных математических моделей теплоэнергетических объектов управления [1].

Математическое моделирование в последние десятилетия оформилось в отдельную междисциплинарную область знаний. В связи с этим актуальной является задача подготовки специалистов, занимающихся разработкой математического обеспечения современных многофункциональных АСУТП на базе программно-технических комплексов (ПТК). К таким специалистам предъявляются не только требования глубоких знаний компьютерных технологий и умения выполнять расчеты с применением современных программно-компьютерных средств, но и требования знаний методов математического моделирования. Однако в большинстве учебных пособий технология создания математических моделей не рассматривается. Как правило, используется некоторый набор базовых моделей данной дисциплины или смежных с ней и в дальнейшем из них строится модель анализируемого процесса. В данной статье сделана попытка с методической точки зрения рассмотреть процесс построения математических моделей с помощью феноменологического метода.

Современные вычислительные средства позволяют справиться почти с любыми сложными математическими моделями. Многие из задач теории управления можно решить с помощью феноменологических теорий, описывающих явления в общем виде [2]. Феноменологические модели связывают только непосредственно наблюдаемые и измеряемые опытным путем величины, никакие модельные представления о структуре материи при этом не используются. Преимуществом таких моделей является их общность, универсальность и простота. Они позволяют полнее изучить и понять описываемые ими причинно-следственные связи.

В расчетных методах теории автоматического управления динамические характеристики объектов (или систем) получаются в результате решения систем дифференциальных уравнений, с различной сте-

пенью полноты описывающих комплекс взаимосвязанных процессов, протекающих в объекте (системе). Таким образом, адекватность получаемых решений реальным характеристикам объекта управления зависит от полноты учета явлений, сопровождающих технологический процесс. Связи между различными потоками вещества и энергии устанавливаются на основе законов термодинамики.

Классическая термодинамика является теорией равновесных систем, основанной на системе аксиом, именуемых «началами». Ее методы, в основном, базируются на использовании тех свойств материи, которые отражены в уравнении состояния. При этом аппарат термодинамики не содержит теоретических рецептов для установления уравнений состояния для конкретных термодинамических систем.

Общая феноменологическая теория термодинамики рассматривает макрофизические свойства (состояния) и процессы взаимодействия (процессы переноса субстратов обмена) тел природы. Ее можно считать общей формальной теорией, построенной в соответствии с аксиоматическим методом. В основании теории лежат понятия обобщенного заряда, обобщенного потенциала, обобщенной работы, обобщенной силы, обобщенной емкости и т.д. В рамках рассматриваемой общей теории этим терминам не приписывается содержательного смысла.

Основным методом получения уравнений связи между первичными понятиями является метод потенциалов, основанный на том, что скалярная функция  $E = f(x_1, \dots, x_n)$ , непрерывная и дифференцируемая (по крайней мере, дважды) по всем своим аргументам, имеет равные вторые смешанные частные производные:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

При этом переменные состояния  $x_1, \dots, x_n$  называют обобщенными зарядами, частные производные

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = X_i \quad (i = 1, \dots, n) - \text{обобщенными потенциалами,}$$

произведение  $X_i dx_i$  – обобщенной работой,  $n$  – числом степеней свободы рассматриваемой системы.

Из равенства (1) выводятся следующие три типа дифференциальных соотношений, выражаю-

щих связей между обобщенными потенциалами и обобщенными зарядами [3].

I. Система и окружающая среда взаимодействуют при постоянных значениях обобщенных зарядов (правило взаимности):

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad i \neq j \quad (i = 1, \dots, n).$$

В этом случае обобщенные потенциалы являются функциями обобщенных зарядов  $X_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Полагая их непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам, можем записать полный дифференциал для каждой из них:

$$dX_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \quad (i = 1, \dots, n).$$

Обозначая  $\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = A_{ik}$ , имеем дифференциальные уравнения связи

$$dX_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} dx_k \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  характеризуют количественную сторону влияния данного заряда на сопряженный с ним потенциал, перекрестные коэффициенты  $A_{ik}$  – количественную меру влияния данного заряда на несопряженный с ним потенциал.

При  $A_{ik} = A_{ki} = 0$  внутренние степени свободы не связаны между собой и дифференциальное уравнение связи (2) распадается на независимые дифференциальные уравнения

$$dX_i = A_i dx_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Уравнения (2) называют дифференциальными уравнениями состояния. Здесь обобщенные потенциалы являются движущими силами процесса переноса обобщенных зарядов.

Закон сохранения, составленный для каждого обобщенного заряда отдельно, называют уравнением баланса заряда.

II. Система и окружающая среда взаимодействуют при постоянных значениях обобщенных потенциалов:

$$\frac{\partial x_j}{\partial X_i} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad i \neq j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Здесь обобщенные заряды выражены через обобщенные потенциалы  $x_i = f_i(X_1, \dots, X_n)$ . Полагая эти функции непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам и записав в виде полного дифференциала

$$dx_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial X_m} dX_m \quad (i = 1, \dots, n),$$

где коэффициенты  $\frac{\partial x_i}{\partial X_m} = K_{im}$  играют роль обобщенных проводимостей, получим дифференциальное уравнение связи в виде

$$dx_i = \sum_{m=1}^n K_{im} dX_m \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Уравнения (3) называют обобщенными дифференциальными уравнениями переноса зарядов. Здесь движущей силой по отношению к обобщенному заряду является сопряженный с ним обобщенный потенциал.

III. Система и окружающая среда взаимодействуют при наличии перекрестных связей.

Перекрестные условия взаимодействия проще всего показать на примере функции двух аргументов. Если скалярная функция двух аргументов  $u = f(x_1, x_2)$  непрерывна и дифференцируема по всем своим аргументам, то

$$du = X_1 dx_1 + X_2 dx_2.$$

При условии существования частных производных

$$\left( \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \right)_{x_1} (x_1 = \text{const}), \quad \left( \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \right)_{x_2} (x_2 = \text{const}),$$

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right)_{X_1} (X_1 = \text{const}), \quad \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_{X_2} (X_2 = \text{const}),$$

выполняются соотношения

$$\frac{\partial X_1}{\partial X_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \quad \text{или} \quad \frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\partial x_1}{\partial x_2}. \quad (4)$$

Уравнения (4) характеризуют симметрию во взаимном влиянии различных форм движения материи.

В практических расчетах используют тот тип дифференциальных соотношений, для которого известны частные производные.

Кроме того, если перекрестные условия составляются для выражений, содержащих величины векторного, тензорного и скалярного типа, необходимо учитывать правила действий с подобными величинами, так как преобразования этих величин проводятся по-разному.

Ценность рассмотренной выше общей феноменологической теории наилучшим образом иллюстрирует термодинамика, поскольку в ней устанавливаются соотношения между довольно абстрактными величинами, такими как энергия, энтальпия, энтропия, свободная энергия и т.д.

При исследовании стационарных равновесных макрофизически однородных систем, которые характеризуются однородными полями параметров и функций состояния, роль скалярной функции  $E = f(x_1, \dots, x_n)$  играет энергия системы, обобщенными зарядами  $x_1, \dots, x_n$  являются переменные состояния.

Изменение энергии при переходе системы из одного равновесного состояния в другое есть полный дифференциал

$$dE = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} dx_i. \quad (5)$$

Формула (5) выражает общий закон сохранения энергии. При этом частные производные

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = X_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

определяют правило выбора обобщенных потенциалов по имеющимся зарядам, обобщенная работа  $X_i dx_i$  выражает количественную меру взаимодействия системы и окружающей среды.

Например, если в качестве обобщенных зарядов рассматривать экстенсивные параметры системы (энтропию  $S$ , внутреннюю энергию  $U$ , объем  $V$ , массу  $k$ -го компонента  $m_k$  в  $N$ -компонентной системе), а в качестве обобщенных потенциалов интенсивные величины (температуру  $T$ , давление  $P$ , химический потенциал  $k$ -го компонента  $\mu_k$ ), то уравнение

$$dU = TdS + PdV + \sum_{k=1}^N \mu_k dm_k \quad (6)$$

выражает закон сохранения энергии для термомеханическо-химических систем (*соотношение Гиббса*).

При исследовании неравновесных систем параметры и функции состояния рассматриваемой системы имеют пространственно-временное распределение, характеризующееся в некоторой области  $D \subset R^3$  непрерывно дифференцируемыми функциями  $X_i = X_i(t, M)$  времени  $t$  и декартовых координат точки  $M$ .

Если для любого момента времени  $t$  выполняется условие  $\frac{\partial X_i}{\partial t} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), система является

стационарной. Неравномерность распределения потенциала в системе характеризует вектор  $\nabla X_i = \text{grad } X_i$  градиента обобщенного потенциала, при этом  $|\text{grad } X_i| = Y_i$  называют термодинамической силой.

Поток обобщенного заряда  $J_i$  является однозначной функцией термодинамической силы  $J_i = f(Y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), аналитическое выражение которой в общем случае неизвестно.

Если система находится в равновесном состоянии, то все  $\nabla X_i = 0$  ( $\forall i = 1, \dots, n$  градиент обобщенного потенциала отсутствует). Тогда вблизи равновесного состояния  $Y = 0$  функцию  $f(Y)$  можно разложить в ряд Маклорена, предполагая ее непрерывно дифференцируемой необходимое число раз:

$$f(Y) = A + B Y + C Y^2 + \dots,$$

где  $A, B, C, \dots$  – постоянные коэффициенты, причем  $A = 0$ .

В качестве приближенной математической модели закона переноса при незначительном удалении от положения равновесия принимают гипотезу Онзагера, устанавливающую линейную связь между потоками и силами [4]:

$$J_i = \sum_{k=1}^m L_{ik} Y_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где  $m$  – число независимых потоков; коэффициенты  $L_{ik}$  называют феноменологическими или коэффициентами Онзагера.

Коэффициенты  $L_{ii}$  представляют собой проводимости системы по отношению к соответствующим зарядам, перекрестные коэффициенты  $L_{ik} (i \neq k)$  характеризуют взаимное влияние потоков.

Соотношения  $L_{ik} = L_{ki}$  ( $i \neq k, i, k = 1, \dots, n$ ) называют соотношениями взаимности Онзагера.

Если  $L_{ik} = L_{ki} = 0$ , то взаимного влияния потоков нет, в этом случае совокупность уравнений (7) распадается на независимые простейшие уравнения.

Например, интенсивность переноса физической субстанции определяют вектором плотности потока, который считают коллинеарным вектору скорости движения среды:

$$\vec{j} = -B \nabla X,$$

где потенциальная функция  $X$  предполагается непрерывно дифференцируемой необходимое число раз по всем своим аргументам;  $B$  – эмпирический коэффициент пропорциональности, зависящий от механизма переноса.

Агафонова Надежда Александровна,  
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики,  
телефон (4932) 26-97-62,  
e-mail: higher@math.ispu.ru

В математических моделях процесса распространения в среде теплоты в качестве потенциальной рассматривают функцию  $T = T(t, M)$  распределения в пространстве в текущий момент времени  $t$  температуры. Тогда приходим к эмпирическому закону теплопроводности Ж. Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T,$$

где  $\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока;  $\lambda$  – теплопроводность среды.

Линейную связь вектора плотности потока обобщенного заряда с градиентом некоторой потенциальной функции используют и в тех случаях, когда перенос этого заряда происходит путем движения микрочастиц под действием внешнего поля. Например, при неравномерном распределении давления, заданном функцией  $p = p(t, M)$  ( $M \in R^3$ ), вектор скорости просачивания частиц жидкости или газа через пористую среду подчиняется закону А. Дарси:

$$\vec{v} = -\chi \nabla p,$$

где  $\chi$  – коэффициент фильтрации.

Обобщение на случай неравновесных нестационарных систем получают на основе *принципа локального равновесия* [4], в основу которого положено утверждение о сохранении условий равновесия в элементарных объемах системы при переходе ее во всем масштабе от равновесного состояния к неравновесному.

Например, соотношение Гиббса (6) в локальной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} u = T \frac{d}{dt} s + P \frac{d}{dt} v + \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{d}{dt} c_k,$$

где  $\frac{d}{dt}$  – оператор полной производной по времени;

$s, u, v$  – удельные энтропия, внутренняя энергия и объем, соответственно;  $c_k$  – массовая концентрация  $k$ -го компонента.

На основе принципа локального равновесия термодинамику необратимых процессов рассматривают как теорию поля и записывают для нее законы сохранения, сформулированные выше, в виде балансных соотношений.

#### Список литературы

1. Тверской Ю.С. Проблемы и направления развития технологии АСУТП электростанций: Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. «Состояние и перспективы развития электротехнологии» (XIV Бенардосовские чтения). – Иваново, 2007. – Т. I. – С.113.
2. Тверской Ю.С. Автоматизация котлов с пылесистемами прямого вдувания. – М.: Энергоатомиздат, 1996.
3. Вейник А.И. Новая система термодинамики обратимых и необратимых процессов. – Минск: Высш. шк., 1966.
4. Журавлев В.А. Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. – М.: Наука, 1979.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. I. Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1976. (Сер.: Теоретическая физика. Т. V).
6. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (физические основы). Монография. – М.: Наука, 1978.