© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2008 г.

УДК 621.3.011.013.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ И ФОРМУЛЫ ПЕРЕСТАНОВКИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

КАДНИКОВ С.Н., д-р техн. наук, ВЕСЕЛОВА И.Е., ст. преп.

Рассматривается векторная реализация известной матричной формулы для пространственного аналога интеграла типа Коши. Получен векторный вариант основной формулы теории гармонических функций и формулы перестановки сингулярных интегралов.

Ключевые слова: система граничных интегральных уравнений, метод регуляризации, голоморфный вектор, методы теории потенциалов.

DIMENSIONAL INTEGRAL ANALOG OF CAUCHY TYPE AND PERMUTATION FORMULAS OF SINGULAR INTEGRALS

S.N. KADNIKOV, Doctor of Engineering, I.E. VESELOVA, Master Teacher

The article is devoted to vector realization of the famous matrix formula for dimensional integral analog of Cauchy Type. The authors got vector variant of the main formulas of the potential functions theory and permutation formulas of singular integrals.

Key words: system of boundary integral equations, regularization method, holomorphic vector, methods of potential theory.

Системы граничных интегральных уравнений (ГИУ), предназначенные для расчета электромагнитного поля в различных электротехнических устройствах, как правило, являются сингулярными, т.е. содержат интегралы, существующие только в смысле главного значения. Чтобы обеспечить возможность практического применения такого рода систем, необходимо доказать существование и единственность их решений. Для этого обычно используется метод регуляризации, с помощью которого сингулярные системы преобразуются к системам уравнений Фредгольма. Интегральные операторы, с помощью которых производится регуляризация, также должны быть сингулярными. При вычислении композиции сингулярных операторов возникает проблема перестановки сингулярных интегралов. В случае однократных интегралов ее решает известная формула перестановки Пуанкаре-Бертрана. Для двумерных сингулярных интегралов, определенных на поверхностях трехмерного пространства, для решения этой задачи может быть использована формула перестановки, полученная в [1]. Анализ этой формулы, которая не предназначена для непосредственного практического применения, был проведен в [2], где выведена формула перестановки сингулярных интегралов со скалярной плотностью. Ниже путем дальнейшего анализа формулы [1] получена формула перестановки сингулярных интегралов с векторной плотностью. Одновременно получен векторный аналог известного тождества для скалярного потенциала, которое в некоторых источниках называется основной формулой теории гармонических функций [3].

Приведем сначала основные формулы, связанные с понятиями голоморфного вектора и пространственного аналога интеграла типа Коши [1]. При этом будем использовать как матричные, так и векторные обозначения, которые явным образом проясняют смысл формул, приведенных в [1].

Будем считать, что односвязная область трехмерного пространства V_i ограничена поверхностью S Ляпунова класса $Л_1(\lambda)$, $0 \le \lambda < 1$, и рассмотрим четырехкомпонентный вектор $a = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$ класса C^1 в $V_i + S$. Используем следующие обозначения:

$$D(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

$$D^*(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & -y \\ y & -z & 0 & x \\ z & y & -x & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

$$M^1_{pq} = -D^*\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi \cdot D\left(n_x,n_y,n_z\right), \qquad (3)$$

$$M^2_{pq} = -D^*\left(n_x,n_y,n_z\right)\Psi \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad (4)$$

$$M^*_{pq} = -D^*\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right). \qquad (5)$$

Здесь Ψ – функция точек p, q класса C^2 в V_i, за исключением, быть может, точки p = q; n_x, n_y, n_z – проекции на оси координат нормали $\vec{n}$ на S в точке p.

С помощью обозначения (1) в сокращенной векторно-матричной форме может быть представлено следующее соотношение:

$$\oint_S D\left(n_x,n_y,n_z\right) a_p dS_p = \int_{V_i} D\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) a_p dV_p. \qquad (6)$$

В векторной форме данное соотношение имеет вид

$$\oint_S \begin{Bmatrix} \left(\vec{n},\vec{A}\right) \\ \vec{n},\varphi+\left[\vec{n},\vec{A}\right] \end{Bmatrix} dS_p = \int_{V_i} \begin{Bmatrix} \operatorname{div}\vec{A} \\ \nabla\varphi+\operatorname{rot}\vec{A} \end{Bmatrix} dV_p. \quad (7)$$

В данном равенстве поверхностные и объемные интегралы должны приравниваться построчно, т.е. оно равносильно системе двух векторных тождеств. Выражения в фигурных скобках нужно рассматривать как сокращенную запись четырехмерного вектора. Нетрудно видеть, что соотношение (7) образовано из известных векторных тождеств [4].

С помощью обозначений (3), (4), (5) могут быть получены следующие соотношения:

$$\oint_S M^1_{pq} a_p dS_p = \int_{V_i} M^*_{pq} a_p dV_p, \quad (8)$$

$$\oint_S M^2_{pq} a_p dS_p = \int_{V_i} \left(M^*_{pq} a_p + a_p\Delta\Psi - \Psi\Delta a_p\right) dV_p. \quad (9)$$

В векторной форме соотношение (8) может быть представлено в виде

$$\oint_S \begin{Bmatrix} -\varphi\left(\vec{n},\nabla\Psi\right)+\left(\vec{A},\left[\vec{n},\nabla\Psi\right]\right) \\ -\varphi\left[\vec{n},\nabla\Psi\right]-\vec{A}\left(\vec{n},\nabla\Psi\right)+\left[\vec{A},\left[\vec{n},\nabla\Psi\right]\right] \end{Bmatrix} dS_p =$$

$$= \int_{V_i} \begin{Bmatrix} -\varphi\Delta\Psi-\left(\nabla\varphi,\nabla\Psi\right)-\left(\nabla\Psi,\operatorname{rot}\vec{A}\right) \\ -\left[\nabla\varphi,\nabla\Psi\right]-\vec{A}\,\Delta\Psi+\left[\nabla\Psi,\operatorname{rot}\vec{A}\right]-\nabla\Psi\operatorname{div}\vec{A} \end{Bmatrix} dV_p. \quad (10)$$

Соотношение (9) в векторной форме примет вид

$$\oint_S \begin{Bmatrix} -\Psi\left(\vec{n},\nabla\varphi\right)-\Psi\left(\vec{n},\operatorname{rot}\vec{A}\right) \\ -\vec{n}\cdot\Psi\operatorname{div}\vec{A}+\left[\vec{n},\Psi\nabla\varphi\right]+\left[\vec{n},\Psi\operatorname{rot}\vec{A}\right] \end{Bmatrix} dS_p =$$

$$= \int_{V_i} \begin{Bmatrix} -\varphi\Delta\Psi-\left(\nabla\varphi,\nabla\Psi\right)-\left(\nabla\Psi,\operatorname{rot}\vec{A}\right) \\ -\nabla\Psi\operatorname{div}\vec{A}-\Psi\Delta\vec{A}-\left[\nabla\varphi,\nabla\Psi\right]+\left[\nabla\Psi,\operatorname{rot}\vec{A}\right] \end{Bmatrix} dV_p. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что с помощью (8) и (9) может быть получена формула

$$\oint_S \left(M^1_{pq} a_p - M^2_{pq} a_p\right) dS_p = \int_{V_i} \left(\Psi\Delta a_p - a_p\Delta\Psi\right) dV_p. \quad (12)$$

В векторной форме эту формулу целесообразно представить в виде двух интегральных соотношений для скалярной и векторной составляющих вектора a:

$$\oint_S \left[\Psi\left(\vec{n},\nabla\varphi\right)-\varphi\left(\vec{n},\nabla\Psi\right)\right] dS_p = \int_{V_i} \left(\Psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\Psi\right) dV_p, \quad (13)$$

$$\oint_S \left(-\vec{A}\left(\vec{n},\nabla\Psi\right)+\left[\vec{A},\left[\vec{n},\nabla\Psi\right]\right]+\vec{n}\Psi\operatorname{div}\vec{A}-\left[\vec{n},\Psi\operatorname{rot}\vec{A}\right]\right) dS_p = \int_{V_i} \left(\Psi\Delta\vec{A}-\vec{A}\Delta\Psi\right) dV_p. \quad (14)$$

Отметим, что в формуле (13) векторный потенциал отсутствует, как и скалярный в формуле (14), т.е. эти два соотношения являются независимыми. Можно сделать вывод, что использованные выше матричные обозначения являются по сути только удобной формой записи, если не устанавливать заранее какой-либо связи между функциями φ и $\vec{A}$. Формула (13) представляет известное интегральное тождество, которое может быть получено из теоремы Гаусса [4]. Соотношение (14) с помощью известных формул векторного анализа может быть преобразовано к виду

$$\oint_S \left(-\left(\vec{n},\vec{A}\right)\nabla\Psi-\left[\nabla\Psi\left[\vec{A},\vec{n}\right]\right]+\vec{n}\Psi\operatorname{div}\vec{A}-\left[\vec{n},\Psi\operatorname{rot}\vec{A}\right]\right) dS_p = \int_{V_i} \left(\Psi\Delta\vec{A}-\vec{A}\Delta\Psi\right) dV_p. \quad (15)$$

Полагая $\Psi=\frac{1}{R}$, где R– расстояние между точками p, q $\in$ V_i, из тождества (15) можно получить векторную форму основной формулы теории гармонических функций [3]:

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \left(-\left(\vec{n},\vec{A}\right)\nabla\frac{1}{R}-\left[\nabla\frac{1}{R},\left[\vec{A},\vec{n}\right]\right]+\vec{n}\frac{1}{R}\operatorname{div}\vec{A}-\left[\vec{n},\frac{1}{R}\operatorname{rot}\vec{A}\right]\right) dS_p - \frac{1}{4\pi}\int_{V_i}\frac{\Delta\vec{A}}{R} dV_p = \begin{cases} \vec{A}_q, \ q\in V_i, \\ 0, \ q\notin V_i. \end{cases} \quad (16)$$

При выводе данного соотношения удобно использовать правила обобщенного дифференцирования, согласно которым

$$\Delta\frac{1}{R}=-\delta, \quad \frac{1}{4\pi}\int_{V_i}\vec{A}\,\Delta\frac{1}{R} dV_p = \vec{A}_q, \ q\in V_i,$$

где δ – дельта-функция точек p, q $\in$ V_i. Формула (16) (при $\operatorname{div}\vec{A}=0$, что необязательно) получена в [4] из скалярного энергетического тождества. Здесь она выведена непосредственно из тождества (14), являющегося векторным аналогом тождества (13), из которого тем же способом можно получить скалярную форму соотношения (16). Подчеркнем, что функции φ и $\vec{A}$ в приведенных соотношениях должны удовлетворять только необходимым условиям дифференцируемости, а в остальном могут быть произвольными. Иными словами, соотношения (8)–(16) следует рассматривать как интегральные тождества, справедливые для определенного класса функций. Отметим в связи с этим, что формула [1]

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S M^1_{pq} a_p dS_p - \frac{1}{4\pi}\int_{V_i} M^*_{pq} a_p dV_p = \begin{cases} a_q, q\in V_i, \\ 0, \ q\notin V_i \end{cases}$$

содержит выражение (5) для M^1_{pq}, в котором функция $\Psi = \dfrac{1}{R}$ справедлива только для вектора a, составляющие которого удовлетворяют уравнению Лапласа.

Рассмотрим далее вектор $b = \left\{\sigma, \delta_x, \delta_y, \delta_z\right\} = \left\{\sigma, \vec{\delta}\right\}$ класса C^0 на поверхности S. Вектор $a = \left\{\varphi, A_x, A_y, A_z\right\} = \left\{\varphi, \vec{A}\right\}$, определенный равенством

$$a_q = \frac{1}{4\pi}\oint_S M^1_{pq} b_p dS_p, \qquad (17)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа в пространстве V_i (покомпонентно). В развернутой векторной форме при $\Psi_{pq} = \dfrac{1}{R_{pq}}$ вектор a представляется в виде

$$a_q = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{ \begin{matrix} -\sigma_p\left(\vec{n}_p, \nabla\dfrac{1}{R_{pq}}\right) + \left(\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\dfrac{1}{R_{pq}}\right]\right) \\ -\sigma_p\left[\vec{n}_p, \nabla\dfrac{1}{R_{pq}}\right] - \vec{\delta}_p\left(\vec{n}_p, \nabla\dfrac{1}{R_{pq}}\right) + \left[\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\dfrac{1}{R_{pq}}\right]\right] \end{matrix} \right\} dS_p. \qquad (18)$$

При $q \in S$ данная формула определяет ряд интегральных операторов. На поверхности S класса $Л_1(\lambda)$ и функциях σ, δ, удовлетворяющих на S условию Гельдера с показателем $0 \le h < 1$, первый интегральный оператор первой строки в (18) будет фредгольмовым, второй – сингулярным. Аналогично во второй строке второй оператор будет фредгольмовым, а первый и третий – сингулярными. Такого рода операторы часто встречаются в системах интегральных уравнений, предназначенных для расчета магнитного (и электромагнитного) поля. При исследовании разрешимости таких уравнений, т.е. возможности их практического применения, необходимо проверить, возможно ли их преобразование к равносильным уравнениям Фредгольма. Для этого используется процесс регуляризации, в котором применяются формулы перестановки сингулярных интегралов. Чтобы получить конкретный вид такого рода формул, которые можно было бы использовать при регуляризации различных типов интегральных уравнений для расчета электромагнитного поля, в качестве исходной используем формулу перестановки сингулярных операторов, полученную в [1]:

$$\oint_S M^1_{p_1q} dS_{p_1} \oint_S M^1_{p_1p} b_p dS_p = -4\pi^2 b_q + \oint_S dS_p \oint_S M^1_{p_1q} M^1_{p_1p} b_{p_1} dS_{p_1}. \qquad (19)$$

Чтобы упростить вывод окончательных формул, нужно учесть, что при указанных выше требованиях к гладкости функций σ, δ и поверхности S сингулярные и фредгольмовские интегральные операторы перестановочны [5] и вследствие этого в интегралах левых и правых частей (19) они могут быть сокращены. Чтобы произвести дальнейшее упрощение, выпишем в векторной форме с учетом этих сокращений выражение для внутреннего интеграла (по p_1) в правой части (19):

$$\oint_S \left\{ -\sigma_p\left(\left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right], \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right) + \left(\left[\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right]\right], \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right) \right\} dS_{p_1}, \qquad (20)$$

$$\oint_S \left\{ -\left(\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right) \cdot \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right] - \sigma_p\left[\left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right], \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right] - \left[\left[\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right]\right], \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right] \right\} dS_{p_1}. \qquad (21)$$

Первый подынтегральный член в (20) имеет неинтегрируемую особенность в точке p = q. Из этого следует, что именно этот член обусловливает наличие внеинтегрального члена в (19). При этом вычисление внутреннего интеграла в правой части (19) должно производиться при $p \ne q$. В то же время второй подынтегральный член в (20) при p = q обращается в нуль. Из этого следует, что наличие внеинтегрального члена от него не зависит, а поэтому можно сделать вывод, что в векторном произведении сингулярных операторов с ядрами вида $\left[\vec{n}, \nabla\dfrac{1}{R}\right]$ допустима обычная перестановка интегралов, и следовательно, в обеих частях (19) они могут быть сокращены. То же самое относится и ко второму подынтегральному члену в (21).

Последний член в (21) можно преобразовать следующим образом:

$$\left[\left[\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right]\right], \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right] = \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right]\left(\vec{\delta}_p, \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right]\right) - \vec{\delta}_p\left(\left[\vec{n}_{p_1}, \nabla\frac{1}{R_{p_1q}}\right], \left[\vec{n}_p, \nabla\frac{1}{R_{p_1p}}\right]\right). \qquad (22)$$

Первые члены в этом выражении справа и в (21) взаимно уничтожаются, и в (21) остается только второй член (22), аналогичный по свойствам первому подынтегральному члену в (20). В результате получаем вместо (19) искомые формулы перестановки сингулярных интегралов:

$$\oint_S \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla \frac{1}{R_{p_1 q}}\right] dS_{p_1} \oint_S \left[\vec{n}_p, \nabla \frac{1}{R_{p_1 p}}\right] \sigma_p dS_p =$$

$$= -4\pi^2 \sigma_q + \oint_S \sigma_p dS_p \oint_S \left(\left[\vec{n}_{p_1}, \nabla \frac{1}{R_{p_1 q}}\right], \left[\vec{n}_p, \nabla \frac{1}{R_{p_1 p}}\right] \right) dS_{p_1}, \tag{23}$$

$$\oint_S \left[\vec{n}_{p_1}, \nabla \frac{1}{R_{p_1 q}}\right] dS_{p_1} \oint_S \left[\vec{n}_p, \nabla \frac{1}{R_{p_1 p}}\right] \vec{\delta}_p dS_p =$$

$$= -4\pi^2 \vec{\delta}_q + \oint_S \vec{\delta}_p dS_p \oint_S \left(\left[\vec{n}_{p_1}, \nabla \frac{1}{R_{p_1 q}}\right], \left[\vec{n}_p, \nabla \frac{1}{R_{p_1 p}}\right] \right) dS_{p_1}. \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что структура данных формул вполне идентична. Строгое обоснование приведенных выше утверждений о перестановке сингулярных интегралов в скалярных и векторных произведениях интегральных операторов может быть проведено методами теории потенциала.

Список литературы

1. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966.
2. **Краснов И.П.** О решении некоторых граничных задач теории гармонических функций // Дифференциальные уравнения. – 1975. – T.XI. – № 11. – С. 34–40.
3. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970.
4. **Стреттон Д.А.** Теория электромагнетизма. – М.: Наука, 1949.
5. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1962.

Кадников Сергей Николаевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологии,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Веселова Ирина Евгеньевна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина,
ассистент кафедры высшей математики,
e-mail: iveselova@math.ispu.ru